Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»
Региональный научно-образовательный центр
«Уральский математический центр»

Современные проблемы математики и ее приложений, Международная (56-я Всероссийская) молодежная школа-конференция

2 февраля — 9 февраля и 18 февраля 2025 г.

Тезисы докладов

Екатеринбург 2025

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЙ: тезисы Международной (56-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, Уральский федеральный университет, 2025.

Настоящее издание включает тезисы Международной (56-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции, прошедшей с 2 – 9 февраля и 18 февраля 2025 года в г. Екатеринбурге.

Представлены работы по следующим направлениям: алгебра и дискретная математика; математическое программирование, некорректные задачи и анализ данных; теория функций; оптимальное управление и дифференциальные игры; стохастическая динамика; машинное обучение; численные методы решения дифференциальных уравнений; топология и геометрия. Сборник представляет интерес для специалистов по указанным областям науки.

Ответственный редактор
к.ф.-м.н. Чистяков П.А.

Ответственный за выпуск
к.ф.-м.н. Минигулов Н.А., Голубятников М.П.

Содержание

Алгебра и дискретная математика (председатель д.ф.-м.н. Н.В. Маслова)

Свойства левых T-квазигрупп

Веселова А.А.
ВГСПУ, Волгоград, Россия
alexandra.912@mail.ru

В работе [1] изучались свойства T-квазигрупп. Эта работа побудила нас изучать свойства левых T-квазигрупп.

Напомним, что квазигруппой называют группоид $(Q,*)$, в котором для любых элементов a и b из Q однозначно разрешимы уравнения

$$a*x=b, \quad y*a=b$$

(см. [2], стр. 39). В нашей работе будем рассматривать группоид $(Q,*)$, в котором для любых элементов a и b из Q однозначно разрешимо только одно из вышеуказанных уравнений. Если в группоиде $(Q,*)$ однозначно разрешимо уравнение $a*x=b$ $(y*a=b)$ для любых элементов a и b из Q, то его называют левой (правой) квазигруппой [3].

Определим операцию левого (правого) деления $\setminus$ $(/)$ в левой (правой) квазигруппе следующим образом: $a\setminus b=c \Leftrightarrow a*c=b \quad (b/a=c \Leftrightarrow c*a=b)$.

Теорема 1. *В левой квазигруппе с правой единицей e верно тождество $x\setminus x=y\setminus y$, причем $x\setminus x=e$. Верно и обратное, если в левой квазигруппе верно тождество $x\setminus x=y\setminus y$, то там есть правая единица $e=x\setminus x$.*

Два группоида с операциями $x*y$ и $x\bullet y$, определенные на одном и том же множестве Q, называются изотопными, если существуют такие подстановки α, β, γ множества Q, что для любых $x,y\in Q$ верно $\gamma(x\bullet y)=\alpha(x)*\beta(y)$. (см. [4], стр. 13). В этом случае группоид $(Q,\bullet)$ называют изотопом группоида $(Q,*)$. Упорядоченную тройку $T=(\alpha,\beta,\gamma)$ называют изотопией. Подстановки (α,β,γ) называются соответственно левой, правой и главной компонентами изотопии T. Изотопия вида $T=(\alpha,\beta,1)$, то есть главная компонента равна 1, называется главной. (см. [4], стр. 13)

Теорема 2. *Пусть $(Q,+)$ - абелева группа, α–эндоморфизм, β– автоморфизм группы $(Q,+)$, $c\in Q$. На Q определим*

$$x*y=\alpha x+\beta y+c.$$

Тогда $(Q,*)$–левая квазигруппа.

Квазигруппу Q называют T-квазигруппой, если на ней существует структура абелевой группы $(Q,+)$ такая, что

$$x*y=\alpha x+\beta y+c$$

для некоторых автоморфизмов α, β группы $(Q,+)$ и элемента $c\in Q$.

По аналогии с этим определением, левую квазигруппу Q назовем левой T–квазигруппой, если на ней существует структура абелевой группы $(Q,+)$ такая, что верно

$$x*y=\alpha x+\beta y+c$$

для некоторых эндоморфизма α, автоморфизма β группы $(Q,+)$ и элемента $c\in Q$, причем $(Q,+)$ будем называть T-группой, а $(Q,+,\alpha,\beta,c)$ - T-формой Q.

Алгебра A называется аффинной ([5]), если A снабжена структурой аддитивной абелевой группы такой, что каждая термальная операция f имеет вид

$f(x_1, x_2 \dots x_n) = a_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$, где $a_0 \in A$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ являются групповыми эндоморфизмами.

Теорема 3. *Если левая квазигруппа является аффинной, тогда она левая T-квазигруппа.*

Теорема 4 . *Если в левой T-квазигруппе $(Q, *)$ есть правая единица e, то $(Q, *)$ является T-квазигруппой с этой же правой единицей и операция $*$ действует по правилу*

$$x * y = x + \beta y - \beta e$$

для некоторого автоморфизма β группы $(Q, +)$. Верно и обратное.

Теорема 5. *Если в левой T-квазигруппе $(Q, *)$ есть единица e, то операция $*$ действует по правилу $x * y = x + y - e$ и $(Q, *)$ – группа, изоморфная $(Q, +)$.*

Теорема 6. *Пусть $(Q, *)$ – левая T-квазигруппа с правой единицей e и $(Q, +)$ – ее T-группа. Тогда $(Q, +)$ является главным изотопом $(Q, *)$.*

Теорема 7. *Пусть $(Q, +)$ и $(Q, \bullet)$ - две T-группы левой T-квазигруппы Q с правой единицей. Тогда $(Q, +)$ и $(Q, \bullet)$ изоморфны.*

Теорема 8. *Любая левая квазигруппа с правой единицей e главноизотопна левой квазигруппе с единицей.*

Теорема 9. *Пусть $(Q, *)$ – левая T-квазигруппа с правой единицей и $(Q, \bullet)$ – левая квазигруппа с единицей. Тогда $(Q, \bullet)$ – T-группа левой T-квазигруппы $(Q, *)$ тогда и только тогда, когда $(Q, \bullet)$ – главный изотоп $(Q, *)$.*

Теорема 10. *Каждая левая подквазигруппа левой T-квазигруппы с правой единицей, у которой есть такая же правая единица, является левой T-квазигруппой с правой единицей.*

Теорема 11. *Гомоморфный образ левой T-квазигруппы Q с правой единицей является левой T-квазигруппой с правой единицей.*

Теорема 12. *Декартово произведение левых T-квазигрупп с правой единицей является левой T-квазигруппой с правой единицей.*

Теорема 13. *Все левые T-квазигруппы с правой единицей образуют многообразие.*

Список литературы

[1] P. Nemec, T. Kepka. T-quasigroups (Part I.). *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica.*, **12**: 1 (1971), 39–49.

[2] А. Г. Курош. Общая алгебра (лекции 1969-1970 учебного года). Москва, 1974.

[3] В. А. Щербаков, А. Х. Табаров, Д. И. Пушкашу. О конгруэнциях группоидов, тесно связанных с квазигруппами. *Фундаментальная и прикладная математика.*, **14**: 5 (2008), 237–251.

[4] В. Д. Белоусов. Основы теории квазигрупп и луп. Москва, 1967.

[5] V. A. Artamonov, S. Chakrabarti, S. Gangopadhyay,S. K. Pal. On Latin squares of polynomially complete quasigroups and quasigroups generated by shifts. *Quasigroups and Related Systems*, **21**: 2 (2013), 117–130.

Ретракции конечных цепей и числа Фибоначчи[1]

Вечтомов Е.М.
Вятский государственный университет, Киров, Россия
vecht@mail.ru

Петров А.А.
Вятский государственный университет, Киров, Россия
andreipetrow@mail.ru

Рассматриваются ретракции конечных цепей. *Цепью* называется любое линейно упорядоченное множество $\langle A, \leqslant\rangle$ при этом $\langle A, \max, \min\rangle$ будет дистрибутивной решеткой.

Определение. *Ретракцией* коммутативной полугруппы $\langle A, +\rangle$ называется любой идемпотентный гомоморфизм e: $A \to A$: 1) $\forall x, y \in A\ e(x + y) = ex + ey$; 2) $ee = e$, т. е. $\forall x \in A\ e(ex) = ex$. Мы пишем ex вместо $e(x)$. Элемент x из A называется *неподвижным* элементом ретракции e на A, если $ex = x$. Для цепей получаем эквивалентное определение ретракции: *ретракция цепи* A — это идемпотентное отображение e: $A \to A$, являющееся изотонным, т. е. $\forall x, y \in A\ (x \leqslant y \Rightarrow ex \leqslant ey)$.

В нашем сообщении установлена формула для числа $Ret(n)$ всех ретракций n-элементной цепи.

Задача нахождения числа ретракций конечных полурешеток возникла в рамках теории полумодулей над полукольцами [1]. *Полумодулем над полукольцом* S называется коммутативная полугруппа $\langle A, +\rangle$ вместе с отображением $S \times A \to A$, $(s, a) \to sa$, удовлетворяющим следующими условиям (для любых $s, t \in S$ и $a, b \in A$): $(s+t)a = sa+ta$; $s(a+b) = sa+sb$; $(st)a = s(ta)$. В случае одноэлементного полукольца $S = \{e\}$ и цепи A полумодули $\langle A, \max\rangle$ над S находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с ретракциями цепи A.

Числами Фибоначчи называются числа последовательности $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, \ldots$, образованной по правилу $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ для всех натуральных чисел $n \geqslant 2$. Информацию о числах Фибоначчи можно найти, например, в известной книге [2, параграф 6.6].

Лемма. *$F_{n+2} = 3F_n - F_{n-2}$ для любого натурального числа $n \geqslant 2$.*

Действительно,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = (F_n + F_{n-1}) + F_n = (F_n + F_{n-1} + F_{n-2}) + F_n - F_{n-2} = 3F_n - F_{n-2}.$$

Теорема. *Для любого натурального числа n число всех ретракций n-элементной цепи равно числу Фибоначчи с номером $2n$: $Ret(n) = F_{2n}$.*

Приведем доказательство теоремы.

Сначала докажем следующее равенство при $n \geqslant 3$:

$$Ret(n) = Ret(n-1) + 2Ret(n-2) + \ldots + kRet(n-k) + \ldots + (n-1)Ret(1) + n. \qquad (1)$$

Пусть e — ретракция n-элементной цепи $1 < 2 < \ldots < n$. Если она имеет m неподвижных элементов $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$, то n-элементная цепь разбивается на m последовательных интервалов $e^{-1}(i_1), e^{-1}(i_2), \ldots, e^{-1}(i_m)$, имеющих соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_m$ элементов, дающих в сумме число n. При $n_1 = 1$ получаем $Ret(n-1)$ таких ретракций e. При $n_1 = 2$ число ретракций e равно $2Ret(n-2)$. Ясно, что при $n_1 = k < n$ число ретракций e будет равно $kRet(n-k)$, а при $n_1 = n$ получаем n ретракций. Что и дает нам формулу (1).

Далее, индукцией по натуральным числам $n \geqslant 3$, на основании формулы (1), выведем формулу

$$Ret(n) = 3Ret(n-1) - Ret(n-2). \qquad (2)$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00117).

Предположив, что равенство (2) выполняется для всех натуральных чисел k (вместо n), $3 \leqslant k \leqslant n$, докажем его для $n+1$. Возьмем в равенстве (1) $n+1$ вместо n и подставим в (1) $Ret(k) = 3Ret(k-1) - Ret(k-2)$ для всех k от 3 до n. В результате получаем

$$\begin{gathered} Ret(n+1) = 3Ret(n) - Ret(n-1) + 2(3Ret(n-1) - Ret(n-2)) + \ldots + \\ +(n-2)(3Ret(2) - Ret(1)) + (n-1)Ret(2) + nRet(1) + n + 1 = \\ = 3[Ret(n-1) + 2Ret(n-2) + \ldots + (n-2)Ret(2) + (n-1)Ret(1) + n] - \\ -[Ret(n-2) + 2Ret(n-3) + \ldots + (n-2)Ret(1) + n - 1] = \\ = 3Ret(n) - Ret(n-1), \end{gathered}$$

поскольку $(n-1)Ret(2) = 3(n-1)Ret(1)$ и $nRet(1) + n + 1 = 2n + 1 = 3n - (n-1)$.

По лемме для F_{2n} — как функции от n — также выполняется рекуррентное соотношение (2). Поскольку $Ret(1) = 1 = F_2$ и $Ret(2) = 3 = F_4$, то $Ret(n) = F_{2n}$ для любого натурального числа n.

Следствие. *На n-элементной цепи существует, с точностью до изоморфизма, ровно F_{2n} полумодулей над одноэлементным полукольцом.*

Также для любого натурального числа $n \geqslant 3$ выполняются следующие равенства:

$$Ret(n+1) = Ret(n) + 3Ret(n-1) + 2Ret(n-2) + \ldots + 2Ret(1) + 2; \tag{3}$$

$$Ret(n+1) = 2Ret(n) + Ret(n-1) + Ret(n-2) + \ldots + Ret(1) + 1. \tag{4}$$

Замечание 1. В силу теоремы формулы (1), (3) и (4) дают соответствующие равенства для чисел Фибоначчи с четными номерами.

Замечание 2. Легко видеть, что число всевозможных идемпотентных отображений n-элементного множества в себя равно $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$, где $\binom{n}{k}$ — число сочетаний из n по k.

Список литературы

[1] Е. М. Вечтомов, А. А. Петров, А. П. Шкляев. Конечные полумодули над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*, **3** (2024), 5–15.

[2] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998.

О конечных неразрешимых группах, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны графу “балалайка”

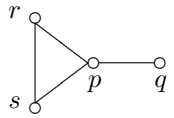
Кондратьев А.С.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовсого УрО РАН, Екатеринбург, Россия
a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Минигулов Н.А.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовсого УрО РАН, Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
n.a.minigulov@imm.uran.ru

Графом Грюнберга–Кегеля (или *графом простых чисел*) $\Gamma(G)$ конечной группы G называется граф, в котором множеством вершин является множество всех простых делителей порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в группе G существует элемент порядка pq. Графом “балалайка” (paw) называют граф, который имеет ровно четыре вершины со степенями 1, 2, 2 и 3.

А.С. Кондратьев описал конечные группы с графом Грюнберга–Кегеля как у групп $Aut(J_2)$ (см. [1]) и A_{10} (см. [2]). Графы Грюнберга–Кегеля этих групп изоморфны как абстрактные графы графу “балалайка”.

В [3] была поставлена более общая задача: описать конечные группы, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны как абстрактные графы графу “балалайка”. В дальнейшем будем считать, что G — конечная группа, граф Грюнберга–Кегеля которой как абстрактный граф изоморфен графу “балалайка”, т. е. граф $\Gamma(G)$ имеет следующий вид:



,

где r, s, p и q — некоторые попарно различные простые числа.

В [3] доказано, что если группа G неразрешима, то фактор-группа $\overline{G} = G/S(G)$ (где $S(G)$ — разрешимый радикал группы G) почти проста, и класифицированы все конечные почти простые группы, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны как абстрактные графы подграфу графа“балалайка”. В [4] описаны конечные разрешимые группы G с этим свойством. Также в [5] классифицированы конечные неразрешимые группы G в следующих двух случаях: (1) группа G не содержит элементов порядка 6; (2) группа G содержит элемент порядка 6 и вершина q графа $\Gamma(G)$ делит $|S(G)|$.

Список литературы

[1] A. S. Kondrat’ev. Finite groups with prime graph as in the group $Aut(J_2)$. *Proc. Steklov Inst. Math.* **283**: 1 (2013), 78–85.

[2] A. S. Kondrat’ev. Finite groups that have the same prime graph as the group A_{10}. *Proc. Steklov Inst. Math.* **285**: 1 (2014), 99–107.

[3] A. S. Kondrat’ev, N. A Minigulov. Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg–Kegel graph of the alternating group A_{10}. *Siberian Electr. Math. Rep.* **15** (2018), 1378–1382.

[4] A. S. Kondrat’ev, N. A. Minigulov. Finite solvable groups whose Gruenberg-Kegel graphs are isomorphic to the paw. *Тр. ИММ УрО РАН.* **28**: 2 (2022), 269–273.

[5] A. S. Kondrat’ev, N. A. Minigulov. On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw. *Commun. Math. Stat.* **10**: 4 (2022), 653–667.

Определяемость кольца $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ его группой автоморфизмов

Королева А.М.
Томский государственный университет, Томск, Россия
elfimova.nastya@bk.ru

Тимошенко Е.А.
Томский государственный университет, Томск, Россия
tea471@mail.tsu.ru

Определение 1. Пусть $B \in X$, где X — некоторый класс групп. Будем говорить, что B определяется своей группой автоморфизмов в классе X, если для всякой группы $B' \in X$ верно $B' \ncong B \Rightarrow Aut(B') \ncong Aut(B)$.

Определение 2. Кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ определяется своей мультипликативной группой $\mathbb{Z}_n^*$, если для всякого натурального m из изоморфизма $\mathbb{Z}_m^* \cong \mathbb{Z}_n^*$ следует $m = n$.

Обозначим через $\mathcal{D}$ множество всех натуральных n, обладающих указанным свойством, а через $C(n)$ мультипликативную циклическую группу порядка n. Так как группа автоморфизмов циклической группы $C(n)$ изоморфна $\mathbb{Z}_n^*$, получаем, что $n \in \mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда $C(n)$ определяется группой автоморфизмов в классе всех конечных циклических групп.

Приведем три свойства множества $\mathcal{D}$, которые можно найти в работе [1]:

Предложение 3. *Для всякого нечетного n выполнено $\mathbb{Z}_{2n}^* \cong \mathbb{Z}_n^*$. В частности, все числа из $\mathcal{D}$ делятся на 4.*

Предложение 4. *Наименьшим элементом множества $\mathcal{D}$ является число 24.*

Теорема 5. *Для всякого $\alpha > 1$ следующие условия* эквивалентны:

1. $2^\alpha \in \mathcal{D}$;
2. *Число* $2^{\alpha-2} + 1$ *является составным.*

В частности, $2^{3\beta+2} \in \mathcal{D}$ для любого $\beta \in \mathbb{N}$, так как $2^{3\beta} + 1$ имеет собственный делитель $2^\beta + 1$. Поэтому верно

Следствие 6. *Множество $\mathcal{D}$ бесконечно.*

Расположенные по возрастанию элементы множества $\mathcal{D}$ образуют последовательность A319928 энциклопедии целочисленных последовательностей OEIS [2].

Если частично упорядочить $\mathcal{D}$ при помощи отношения «делит», будет справедлива

Теорема 7. *Единственными минимальными элементами множества $\mathcal{D}$ являются числа*

$$24 = 2^3 \cdot 3, \quad 32 = 2^5, \quad 80 = 2^4 \cdot 5,$$

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7, \quad 324 = 2^2 \cdot 3^4, \quad 2052 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 19.$$

Определение 8. Для всяких $n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ положим $\rho_n(\mathcal{A}) = \frac{|\{1,2,\ldots,n\} \cap \mathcal{A}|}{n}$. Асимптотической (верхней асимптотической) плотностью множества $\mathcal{A}$ называется число

$$\rho(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(\mathcal{A}) \quad (\overline{\rho}(\mathcal{A}) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \rho_n(\mathcal{A})).$$

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество $24\mathbb{N} \cup 32\mathbb{N} \cup 80\mathbb{N} \cup 252\mathbb{N} \cup 324\mathbb{N} \cup 2052\mathbb{N}$. Тогда $\mathcal{E}$ имеет период $\text{НОК}(24, 32, 80, 252, 324, 2052) = 1723680$ в том смысле, что $x \in \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $x + M \in \mathcal{E}$ для любого $x \in \mathbb{N}$.

Тогда верно

Следствие 9. *$\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$. В частности, $\overline{\rho}(\mathcal{D}) \le \rho(\mathcal{E})$.*

Предложение 10. *Существует множество $\mathcal{F}$, имеющее период M, асимптотическую плотность*

$$\rho(\mathcal{F}) = \frac{90192}{1723680} = \frac{1201}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19} = 0.05(267335004177109440)$$

и такое, что $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$. В частности, $\overline{\rho}(\mathcal{D}) \leq \rho(\mathcal{F})$.

Множество $\mathcal{F}$, о котором идёт речь в предложении, получается из $\mathcal{E}$ выкидыванием чисел вида:

- $16s$, где s не делится на 2 и 5;
- $9s$, где s не делится на 3 и 7;
- $27s$, где s не делится на 3 и 19.

Список литературы

[1] В. К. Вильданов, А. М. Себельдин, А. Л. Силла. Определяемость циклических групп своими группами автоморфизмов. *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона.* Вып. 10. Киров: ВятГГУ, 2008, 44–50.

[2] URL: https://oeis.org/A319928.

О длине основания рельсового целоудалённого множества

Лушина Е. А.
ВГУ, Воронеж, Россия
katyalu2812@yandex.ru

Множество точек M на плоскости, в котором расстояние между любыми двумя точками является целым числом, и которое не содержится целиком ни в одной прямой $L \subset \mathbb{R}^2$, называется целоудалённым множеством. Такое множество M всегда конечно [1, 2].

Определение 1. Мощностью множества M (обозначается $\#M$), состоящего из конечного числа элементов, называется количество элементов этого множества.

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathfrak{M}_n$ множество таких целоудалённых множеств M, что $\#M = n$, $n \geq 3$.

Определение 2. Ребром множества M называется любой отрезок AB, где $A, B \in M$.

Определение 3. [3] Несжимаемым (prime) называют множество $M \in \mathfrak{M}_n$, наибольший общий делитель длин всех ребер которого равен 1.

Определение 4. Диаметром множества $M \in \mathfrak{M}_n$ будем называть наибольшее расстояние между любыми двумя точками множества M:

$$\operatorname{diam} M = \max_{A,B \in M} |AB|.$$

Определение 5. [4] Характеристикой множества $M \in \mathfrak{M}_n$ называется свободное от квадратов число p такое, что для любых $A, B, C \in M$ площадь треугольника ABC соизмерима с $\sqrt{p}$. Пишут: $\operatorname{char} M = p$. Свободное от квадратов число — это число, которое не делится ни на один квадрат, кроме 1. Два числа называются соизмеримыми, если их отношение выражается рациональным числом.

При изучении множеств $M \in \mathfrak{M}_n$ удобно ввести следующую систему координат.

Теорема(о сетке) [5] *Множество $M \in \mathfrak{M}_n$, $\operatorname{char} M = p$ может быть размещено на решётке*

$$\left\{ \left(\frac{a_i}{2m}; \frac{b_i \sqrt{p}}{2m} \right) \right\},$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, в качестве m можно взять длину любого ребра множества M.

Большая часть целоудалённых множеств с малым диаметром имеет структуру веерных множеств.

Определение 6. Веерным (facher) называют множество $M \in \mathfrak{M}_n$, для которого найдется такая прямая $L \subset \mathbb{R}^2$, что $(n-1)$ точек лежит на L.

Проблема существования веерного множества с заданными параметрами хорошо изучена в [3]. В частности, доказано, что для любой мощности $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ и любого $k \in \mathbb{N}$ существует несжимаемое (prime) множество $M \in \mathfrak{M}_n$, содержащее ребро k. Так, всякое множество $M \in \mathfrak{M}_3$ с ребром 1 является веерным [6].

Определение 7. Рельсовым (rails) называют множество $M \in \mathfrak{M}_n$, для которого можно единственным образом найти такие параллельные прямые $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^2$, что k точек лежат на L_1, а $(n-k)$ — на L_2, причем $k \geq 2$, $(n-k) \geq 2$. Основанием рельсового множества назовем любое ребро, которое лежит на одной из параллельных прямых $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^2$.

Среди рельсовых множеств чаще встречаются множества, в которых 2 точки находятся на одной прямой, а все остальные — на другой. Рельсового множества с основанием 1 не существует; из множеств, приведенных в [7], растяжением можно получить рельсовые множества с основанием от 3 до 16.

Утверждение. *Пусть ребро AB — основание рельсового множества $M \in \mathfrak{M}_4$. Тогда $AB > 2$.*

Доказательство. Если $AB = 1$, то множество M является веерным [6]. Предположим, что $AB = 2$. По теореме о сетке зададим прямоугольную систему координат: $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(a/4; b\sqrt{p}/4)$ и $D(-a/4; b\sqrt{p}/4)$. Пусть $|CD| = r$, $|AC| = |BD| = n$, тогда $|BC| = |AD| = n - 1$, $n, r \in \mathbb{N}$. Выпишем расстояния между точками множества M:

$$|AC| = \sqrt{\left(\frac{a}{4} + 1\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{p}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{(a+4)^2 + pb^2}}{4} = n;$$

$$|BC| = \sqrt{\left(\frac{a}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{p}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{(a-4)^2 + pb^2}}{4} = n - 1;$$

$$|CD| = \sqrt{\left(\frac{a}{4} + \frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a}{2} = r.$$

Из полученных уравнений составим и решим систему:

$$\begin{cases} \sqrt{(a+4)^2 + pb^2} = 4n \\ \sqrt{(a-4)^2 + pb^2} = 4(n-1) \\ a = 2r. \end{cases} \tag{1}$$

Откуда

$$a = 2n - 1.$$

Получили противоречие с условием системы (1). Следовательно, не существует рельсового множества M с ребром 2.

Таким образом, наименьшая длина основания рельсового множества, для которого вопрос существования остаётся открытым, равна 17.

Список литературы

[1] P. Erdös. Integral distances. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51**: 12 (1945), 996.

[2] N. H. Anning, P. Erdös. Integral distances. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51**: 8 (1945), 598–600.

[3] R. E. Zvolinsky. Facher integral point sets with particular distances of arbitrary cardinality. *Тезисы международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики".* 2021, 668–674.

[4] A. Kemnitz. Punktmengen mit ganzzahligen Abständen : дис. — 1988.

[5] Н. Н. Авдеев, Е. М. Семенов. Множества точек с целочисленными расстояниями на плоскости и в евклидовом пространстве. *Математический форум (Итоги науки. Юг России)*, **12** (2018), 217–236.

[6] N. N. Avdeev. On existence of integral point sets and their diameter bounds. *Australasian Journal of Combinatorics*, **77** (2020), 100–116.

[7] H. Harborth, A. Kemnitz, M. Möller. An upper bound for the minimum diameter of integral point sets. *Discrete & computational geometry*, **9** (1993), 427–432.

Симметрическо-групповая закономерность в распределении значений минимумов положительных квадратичных форм, приведенных по Коркину-Золотарёву

Лялин М.А.
Балтийский федеральный университет имени И.Канта, Калининград, Россия
maxi2704@yandex.ru

Одним из направлений в постквантовой криптографии является криптография на решётках [1]. Основной задачей из теории решёток, используемой для построения криптографических систем, является задача поиска кратчайшего вектора в решётке [1,2]. Смежной задачей является задача построения плотных решётчатых упаковок равных шаров [3]. Плотные упаковки шаров также широко используются в алгоритмах кодирования информации [4]. В работе [5] представлено доказательство того, что никакая упаковка единичных шаров в евклидовом пространстве R^8 не имеет плотности большей, чем плотность решётчатой упаковки Коркина-Золотарёва E_8. В работе [6] приведены критические решётки до размерности 8, а также рассмотрены их некоторые метрические свойства. В работе [7] установлена связь между алгоритмами поиска кратчайшего вектора решётки и константой Эрмита. В работе [8] приводятся возможные значения постоянной Эрмита в размерностях 9 - 23. В работе [9] установлены симметрическо-групповые закономерности в распределении значений минимумов положительных квадратичных форм (ПКФ), приведённых по Коркину-Золотарёву, а также установлено их соответствие значениям минимальных высот фундаментальных параллелепипедов решётчатых упаковок равных шаров.

Теория приведения ПКФ произвольного числа переменных была изложена во втором мемуаре Коркина и Золотарёва и там же использована как метод получения значений и оценок постоянной Эрмита, а тем самым и решения задачи о плотнейших упаковках [10,11].

Рассмотрим разложение по Лагранжу для произвольной ПКФ:

$$f = A_1(x_1-\sum_{k=2}^{n}\alpha_{1k}x_k)^2+A_2(x_2-\sum_{k=3}^{n}\alpha_{2k}x_k)^2+...+A_l(x_l-\sum_{k=l+1}^{n}\alpha_{lk}x_k)^2+...+A_n(x_{n-1}-\alpha_{n-1,n}x_n)^2+A_nx_n^2. \quad (1)$$

ПКФ называется приведенной по Коркину–Золотарёву, если в её разложении при $l = 1, 2, ..., n-1$ и $k = l+1, l+2, ..., n$ коэффициенты A_l являются значениями минимумов форм:

$$\phi_1 = f(x_1, x_2, ..., x_n), \phi_{l+1}(x_{l+1}, x_{l+2}, ..., x_n) = \phi_l(x_l, x_{l+1}, ..., x_n) - A_l(x_l - \sum_{k=l+1}^{n}\alpha_{lk}x_k)^2, \quad (2)$$

а коэффициенты $\alpha_{l,l+k}, \alpha_{lk}$ удовлетворяют неравенствам $0 \le \alpha_{l,l+k} \le 1/2, -1/2 \le \alpha_{lk} \le 1/2$. Для каждого разложения по Коркину–Золотарёву справедливо равенство:

$$\det f = A_1A_2...A_n, \quad (3)$$

а также "Первое неравенство Коркина-Золотарёва": $A_{k+1} \ge (3/4)A_k$, где $k = 1, 2, ..., n-1$ и "Второе неравенство Коркина-Золотарёва": $A_{i+1} \ge (2/3)A_i$, где $i = 1, 2, ..., n-2$.

Согласно определению постоянной Эрмита γ_n и равенству (3), представляя каждый класс эквивалентности ПКФ разложением по Коркину-Золотарёву, имеем:

$$\gamma_n = \sup A_1(A_1A_2...A_n)^{-1/n} \quad (4)$$

Оценка постоянной Эрмита:

$$\gamma_n \le (4/3)^{(n-1)/2} \quad (5)$$

Определив минимальный вектор решётки $\min\Gamma = 2$, значения высот фундаментального параллелепипеда h_n решётки Γ соответствуют значениям коэффициентов A_n положительных квадратичных форм, приведенных по Коркину–Золотарёву и связаны следующим равенством [9]:

$$h_n = 2\sqrt{A_n} \quad (6)$$

Для размерностей 1 – 8, имеют место следующие равенства [9]:

$$h_1 * h_8 = h_2 * h_7 = h_3 * h_6 = h_4 * h_5 = 2 \tag{7}$$

$$A_1 * A_8 = A_2 * A_7 = A_3 * A_6 = A_4 * A_5 = \frac{1}{4} \tag{8}$$

Используя известные значения центральных плотностей решетчатых упаковок [12], получаем равенства для размерностей 9 – 24.

Для размерностей 9 – 16, имеют место следующие равенства [9]:

$$h_9 * h_{16} = h_{10} * h_{15} = h_{11} * h_{14} = h_{12} * h_{13} = 1 \tag{9}$$

$$A_9 * A_{16} = A_{10} * A_{15} = A_{11} * A_{14} = A_{12} * A_{13} = \frac{1}{16} \tag{10}$$

Для размерностей 17 – 24, имеют место следующие равенства [9]:

$$h_{17} * h_{24} = h_{18} * h_{23} = h_{19} * h_{22} = h_{20} * h_{21} = \frac{1}{2} \tag{11}$$

$$A_{17} * A_{24} = A_{18} * A_{23} = A_{19} * A_{22} = A_{20} * A_{21} = \frac{1}{64} \tag{12}$$

В работе [**?**] установлено соответствие значений минимумов ПКФ значениям высот фундаментальных параллелепипедов плотнейших решётчатых упаковок. В размерностях 1 – 24 установлены симметрии в распределении значений минимумов положительных квадратичных форм, приведенных по Коркину-Золотарёву и значений высот фундаментальных параллелепипедов по группам размерностей 1 – 8, 9 – 16, 17 – 24.

Список литературы

[1] D. J. Bernstein, J. Buchmann, E. Dahmen. Introduction to post-quantum cryptography. Post-Quantum Cryptography, 2009, 1–14.

[2] Miklos, Ajtai., Generating Hard Instances of Lattice Problems. *Electronic Colloquium on Computational Complexity*, 3, 1996.

[3] Д. Конвэй, Н. Слоэн. Упаковки шаров, решётки и группы. т. 1. Москва: Мир, 1990.

[4] Н. Н. Андреев, В. А. Юдин. Арифметический минимум квадратичной формы и сферические коды. *Матем. просв., Сер. 3.* **2** (1998), 133–140.

[5] M. S. Viazovska. The sphere packing problem in dimension 8. *Ann. Math.*, **185**: 3 (2017), 991–1015.

[6] Ю. А. Басалов. О критических решётках единичного шара. *Чебышевский сборник*, **23**: 5 (2022) 20–37.

[7] P. Q. Nguyen. Hermite's Constant and Lattice Algorithms. Berlin, Heidelberg: Springer. In: Nguyen, P., Vallee, B. (eds) The LLL Algorithm. Information Security and Cryptography, 2009.

[8] L. Machler, D. Naccache, A Conjecture on Hermite Constants. Cryptology. ePrint Archive, Paper 2022/677, 2022, https://eprint.iacr.org/2022/677.

[9] М. А. Лялин. Симметрическо-групповая закономерность в распределении значений минимумов положительных квадратичных форм, приведенных по Коркину-Золотарёву. *International Journal of Open Information Technologies* **12**:6 (2024).

[10] S. S. Ryshkov, E. P. Baranovskii. Classical metthods in the theory of lattice packings. *Russian Mathematical Surveys*, **34**: 4 (1979), 1–68.

[11] Е. И. Золотарёв. Полное собрание сочинений. Вып. 1, Изд-во АН, 1931.

[12] N. Gabriele, N. J. A. Sloane. Table of Densest Packings Presently Known. https://www.math.rwth-aachen.de/ Gabriele.Nebe/LATTICES/density.html.

О формально самодуальных графах и сильно регулярных графах без треугольников

Махнев А.А.
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
makhnev@imm.uran.ru

Чень Минчжу
Университет провинции Хайнань, Хэйкоу, Китай
994194@hainanu.edu.cn

Дистанционно регулярный граф называется формально самодуальным, если его матрица собственных значений P совпадает с его матрицей дуальных собственных значений Q.

И.Н. Белоусов, А.А. Махнев и Д.В. Падучих [1] изучили дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3 такие, что Γ_3 является сильно регулярным графом без треугольников с параметрами $(v, r^2+\mu(r+1), 0, \mu)$ и неглавными собственными значениями $r, -\mu-r$. Далее, для $k = r^2+\mu(r+1)$ граф Γ имеет массив пересечений $\{(\mu+r-1)k/\mu, \mu+r-1, c_2; 1, c_2, (\mu+r-1)(k/\mu-1)\}$.

Если граф Γ является формально самодуальным, то $\mu = r(r-1)/2$, $c_2 = r(r+3)/2$ и Γ имеет массив пересечений

$$\{(r^2+2r-1)(r+2)/2, (r+3)r^2/2, (r+1)/2; 1, (r+3)r/2, (r+2)(r+1)r/2\},$$

где r не сравнимо с 3 по модулю 4. При $r = 2$ получим граф Γ с массивом пересечений $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$ (имеет нецелые кратности собственных значений) и граф Γ_3 с параметрами $(50, 7, 0, 1)$.

В работе доказано, что двудольное удвоение графа с параметрами $(v, (r^3+2r^2-r)/2, 0, r(r-1)/2)$ не существует при $r > 2$. Как следствие, сильно регулярный граф с параметрами $((r^3+2r^2-r)/2, 0, r(r-1)/2)$ не существует при $r > 2$.

Теорема. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

$$\{(r^3+2r^2-r)/2, (r^3+2r^2-r-2)/2, (r^3+r^2)/2, (r-1)r/2;$$

$$1, (r-1)r/2, (r^3+r^2)/2, (r^3+2r^2-r)/2\}$$

не существует при $r > 2$.

Следствие. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) сильно регулярный граф с параметрами $(v, (r^3+2r^2-r)/2, 0, r(r-1)/2)$ не существует при $r > 2$;

(2) дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{(r^2+2r-1)(r+2)/2, (r+3)r^2/2, (r+1)r/2; 1, (r+3)r/2, (r+2)(r+1)r/2\}$ не существует.

Список литературы

[1] I. Belousov, A. Makhnev, D. Paduchikh. Inverse problems in graph theory: graphs without triangles. *SEMR*, **18** (2021), 27–42.

О небольших графах Шилла

Махнев А.А.
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
makhnev@imm.uran.ru

Цай Цэньчжу
Университет провинции Хайнань, Хэйкоу, Китай
caijzh12@163.com

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и θ_1 — второе собственное значение, причем $\theta_1 \geq \frac{a_1+\sqrt{a_1^2+4k}}{2}$, если $d \geq 4$. Кулен и Пак назвали графом Шилла дистанционно регулярный граф диаметра 3 с $\theta_1 = a_3$.

В этом случае $\theta_1 = \frac{a_1+\sqrt{a_1^2+4k}}{2}$ и $a = a_3$ делит k [1, теорема 7]. Положим $b = b(\Gamma) = k/a$. Тогда θ_1 не меньше $\min\{\frac{a_1+\sqrt{a_1^2+4k}}{2}, a_3\}$.

Кулен и Пак нашли допустимые массивы пересечений графов Шилла с $b \leq 3$. И.Н. Белоусов, А.А. Махнев и Цэньчжу Цай перечислили допустимые массивы пересечений графов Шилла с $b = 4$ [2]. И.Н. Белоусов, А.А. Махнев и Хайян Ли перечислили допустимые массивы пересечений графов Шилла с $b = 5$ [3]. Минчжу Чень, А.А. Махнев, И.Н. Белоусов перечислили массивы пересечений графов Шилла с $b = 6$.

В работе изучаются небольшие графы Шилла с $b \leq 5$.

Теорема 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{20, 18, 6; 1, 1, 15\}$ *не существует.*

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{25, 24, 3; 1, 3, 20\}$ *не существует.*

Теорема 3. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{25, 24, 9; 1, 1, 20\}$ *не существует.*

Список литературы

[1] J. H. Koolen, J. Park. Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, **31**: 8 (2010), 2046–2073.

[2] I.N. Belousov, A. A. Makhnev, Jinzhuan Cai. Some Shilla graphs with $b = 4$ do not exist. *Izvestiya Gomel University*, **129** (2021), 111–115.

[3] I.N. Belousov, A. A. Makhnev, Haiyan Li. Some Shilla graphs with $b = 5$ do not exist. *Vestnik Perm University*, **57** (2022), 40–45.

О кодах в дистанционно регулярных графах диаметра 3

Махнев А.А.
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
makhnev@imm.uran.ru

Ли Хайян
Университет провинции Хайнань, Хэйкоу, Китай
994194@hainanu.edu.cn

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d. Для $i \in \{1, 2, ..., d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u, w) = i$.

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 с собственным значением $\theta_1 = a_3$ [1].

Для графа Шилла число $a = a_3$ делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Граф Шилла имеет массив пересечений $\{ab, (a + 1)(b - 1), b_2; c_1, c_2, a(b - 1)\}$.

Кулен и Пак нашли допустимые массивы пересечений для графов Шилла с $b \leq 3$. Известные графы Шилла — это графы с массивами пересечений:

- $\{q^2-q, q^2-q-2, q+1; 1, 1, q^2-2q\}$, $q > 2$ (бесконечная серия унитарных неизотропных графов);
- $\{4, 3, 3; 1, 1, 2\}$ (нечетный граф на 7 точках);
- $\{6, 4, 2; 1, 2, 3\}$ (граф Хэмминга $H(3, 3)$);
- $\{6, 4, 4; 1, 1, 3\}$ (обобщенный шестиугольник $GH(2, 2)$);
- $\{10, 6, 4; 1, 2, 5\}$ (граф Тервиллигера и локально Петерсеновский граф);
- $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$ (граф Доро);
- $\{18, 10, 4; 1, 4, 9\}$ (граф Джонсона $J(9, 3)$).

Заметим, что в известных графах Шилла $b_2 = sc_2$. Такие графы изучал И.Н. Белоусов [2].

Для графа Шилла верно неравенство $(b + a)b_2 \geq (1 + a)c_2$ [1, лемма 10]. В случае равенства имеем $p^3_{33} = 0$ и $(b + a)b_2 = (1 + a)c_2$, поэтому $a(c_2 - b_2) = bb_2 - c_2$ и $(b - 1)b_2 = s(c_2 - b_2)$. Граф Шилла назовем экстремальным, если $(b + a)b_2 = (1 + a)c_2$.

Экстремальный граф Шилла имеет массив пересечений $\{(s-1)b, s(b-1), sc_2/(s+b-1); 1, c_2, (s-1)(b-1)\}$. В работе изучаются экстремальные графы Шилла.

Если $s + b - 1 = c_2l$, то $b_2 = s/l$, $b = c_2l - s + 1$ и получается массив пересечений

$$\{(s - 1)(c_2l - s + 1), s(c_2l - s), s/l; 1, c_2, (s - 1)(c_2l - s)\}.$$

Так как $a = s - 1 \geq b = c_2l - s + 1$, то $c_2 \leq (2s - 2)/l$. Если $l = 1$, то имеем массив $\{(s - 1)(c_2 - s + 1), s(c_2 - s), s; 1, c_2, (s - 1)(c_2 - s)\}$ и $c_2 \leq 2s - 2$.

Теорема. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений*

$$\{(s - 1)(c_2 - s + 1), s(c_2 - s), s; 1, c_2, (s - 1)(c_2 - s)\}.$$

Тогда c_2 делит s^2, Γ_3 — сильно регулярный граф с параметрами $(v, s^2(c_2 - s + 1)/c_2, 0, s^2/c_2)$ и неглавными собственными значениями $r = s - s^2/c_2$, $-(\mu + r) = -s$, где $s < c_2 \leq 2s - 2$.

Список литературы

[1] J. Koolen, J. Park. Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, **31** (2010), 2064–2073.

[2] I. N. Belousov. Shilla graphs with $b_2 = sc_2$. *Trudy IMM UrO RAN*, **24**: 3 (2018), 175–185.

Некоторые теоремы о треугольниках с соизмеримыми углами[1]

Осипов Н.Н.
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
nnosipov@gmail.com

Медведева М.И.
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
mimedvedeva@rambler.ru

В элементарной планиметрии существует множество теорем, в которых фигурируют стандартные элементы треугольника типа медиан, высот и биссектрис. Особенно интересными и неожиданными оказываются теоремы, в которых участвуют биссектрисы. Вот пример такой теоремы: для любых трех отрезков всегда найдется треугольник, для которого эти отрезки служат биссектрисами (см., например, [2]).

В докладе будет рассказано о решении следующих задач, связанных с биссектрисами треугольника: задачи о треугольниках Шарыгина, задачи о треугольниках с равными биссектрисами и задачи об albime-треугольниках (соответствующие определения см. ниже). Первые две задачи можно найти в статье [3], а третью — в статье [4]. Во всех трех задачах существует бесконечно много попарно не подобных искомых треугольников. Представляет интерес решение этих задач при следующих дополнительных ограничениях:

A. Искомые треугольники имеют соизмеримые стороны.

B. Искомые треугольники имеют соизмеримые углы.

Наиболее распространенной является версия A. В этой версии любая из данных задач сводится к нахождению рациональных точек на соответствующей *эллиптической кривой* и перестает быть элементарной-геометрической (см., например, [4, 8]). В докладе рассматривается версия B этих задач, что встречается в литературе гораздо реже. Здесь приходится иметь дело с *тригонометрическими диофантовыми уравнениями*, примеры решения которых можно найти в статьях [6, 7] (см. также [5], где тригонометрические диофантовы уравнения исследуются на систематической основе). Прежде чем решать тригонометрическое диофантово уравнение, его нужно составить, исходя из геометрического условия задачи. Для этого применяются специальные параметризации треугольника, где в роли параметров выступают комплексные числа с единичным модулем (см. [1]). Основные результаты — нижеследующие теоремы 1 — 3. Почти элементарный метод их доказательства опирается на свойства *круговых полей* и *сумм Рамануджана*, а также использует *систему компьютерной алгебры* для вычисления *базисов Грёбнера* в своей технической части (подробнее см. в статье [9]).

I. Задача о треугольниках Шарыгина имеет весьма богатую историю (см. [8]). Для неравнобедренного треугольника ABC пусть A_1, B_1, C_1 — основания соответствующих внутренних биссектрис, а A_2, B_2, C_2 — основания внешних биссектрис.

Определение 1. Треугольник вида $A_iB_jC_k$, где $\{i,j,k\} = \{1,1,1\}$ или $\{i,j,k\} = \{1,2,2\}$, называется *биссектральным треугольником* для треугольника ABC.

Определение 2. Треугольник ABC называется *треугольником Шарыгина*, если он сам неравнобедренный, однако один из его биссектральных треугольников является равнобедренным.

Условие равнобедренности биссектрального треугольника $A_1B_1C_1$ можно записать, например, так:

$$C_1A_1 = C_1B_1. \tag{1}$$

[1]Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2024-1429).

Условие равнобедренности для остальных биссектральных треугольников записывается двумя способами: либо в виде

$$C_1A_2 = C_1B_2 \tag{2}$$

(за вершину принимается основание внутренней биссектрисы), либо в виде

$$C_2A_1 = C_2B_2 \tag{3}$$

(за вершину берется основание внешней биссектрисы).

Задача о треугольниках Шарыгина в версии A решена в статье [8]. Рассмотрим задачу о треугольниках Шарыгина в версии B. Здесь одним из решений является так называемый *гептагональный треугольник* ABC с углами

$$\angle A = \pi/7, \quad \angle B = 2\pi/7, \quad \angle C = 4\pi/7, \tag{4}$$

для которого равнобедренными будут три биссектральных треугольника $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_1$, $A_2B_1C_2$. Но есть и другие решения: это *первый пентадекагональный треугольник* ABC с углами

$$\angle A = 11\pi/15, \quad \angle B = \pi/15, \quad \angle C = \pi/5 \tag{5}$$

(выполнено условие (2)), а также *второй пентадекагональный треугольник* ABC с углами

$$\angle A = 2\pi/15, \quad \angle B = 7\pi/15, \quad \angle C = 2\pi/5 \tag{6}$$

(выполнено условие (3)).

Теорема 1. Кроме гептагонального треугольника с углами (4) и двух пентадекагональных треугольников с углами (5) и (6), других треугольников Шарыгина с соизмеримыми углами не существует.

Как следствие, верна следующая гипотеза из статьи [8] (см. Hypothesis 2.2): в классе неравнобедренных треугольников ABC с соизмеримыми углами только для гептагонального треугольника с углами (4) выполняется условие (1).

II. Как известно, если треугольник имеет две равные внутренние биссектрисы, то он равнобедренный (*теорема Штейнера — Лемуса*). В случае внешних биссектрис это уже не так: для первого и второго пентадекагональных треугольников имеем $AA_2 = BB_2$ и $AA_1 = BB_2$ соответственно.

Теорема 2. Кроме пентадекагональных треугольников с углами (5) и (6), других неравнобедренных треугольников с соизмеримыми углами и равными биссектрисами (двумя внешними или одной внутренней и одной внешней), не существует.

Отметим, что задача о неравнобедренных треугольниках с равными биссектрисами в версии A решений не имеет.

III. Термин «albime triangle» был предложен в статье [4] и означает следующее. Для треугольника ABC пусть AA_1 — биссектриса из одной вершины, BB' — медиана из другой вершины и CC'' — высота из третьей вершины.

Определение 3. Треугольник ABC называется *albime-треугольником*, если прямые AA_1, BB' и CC'' пересекаются в одной точке.

Тривиальным примером albime-треугольника является равносторонний треугольник. В статье [4] решена задача описания всех albime-треугольников в версии A (в частности, существует бесконечно много нетривиальных решений). Что касается этой задачи в версии B, то она также нетривиально разрешима: треугольник ABC с углами

$$\angle A = \pi/4, \quad \angle B = \pi/8, \quad \angle C = 5\pi/8 \tag{7}$$

является albime-треугольником.

Теорема 3. Кроме треугольника с углами (7), других неравносторонних albime-треугольников с соизмеримыми углами не существует.

Список литературы

[1] Н. Н. Осипов. О механическом доказательстве планиметрических теорем рационального типа. *Программирование*, **40** (2014), 41–50.

[2] Н. Н. Осипов. Задача о треугольнике с заданными длинами биссектрис. В сб.: *Математическое просвещение, сер. 3*, **30** (2023), 209–224.

[3] И. Ф. Шарыгин. Откуда берутся задачи. *Квант*, **9** (1991), 42–49.

[4] E. Bakker, J. S. Chahal, J. Top. Albime triangles and Guy's favourite elliptic curve. *Expo. Math.*, **34** (2016), 82–94.

[5] J. H. Conway, A. Jones. Trigonometric diophantine equations (On vanishing sums of roots of unity). *Acta Arithm.*, **30** (1976), 229–240.

[6] H. S. M. Coxeter, W. Crosby. A Trigonometric Equation. *Amer. Math. Monthly*, **53** (1946), 103–107.

[7] P. Gordan. Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veranderlichen. *Math. Ann.*, **12** (1877), 23–46.

[8] I. V. Netay, A. V. Savvateev. Sharygin triangles and elliptic curves. *Bull. Korean Math. Soc.*, **54** (2017), 1597–1617.

[9] N. N. Osipov. On a Conjecture on Sharygin Triangles. https://doi.org/10.48550/arXiv.2408.02968

Представление бирегулярных полуколец с инволюцией сечениями пучка

Протасов Н. С.
ФГБОУ ВО "СГУ им. Питирима Сорокина", Сыктывкар, Россия

В [1, Теорема 1] получено пучковое представление произвольного *pq*-бэровского полукольца с инволюцией, сформулированы задачи дальнейшего исследования, одна из которых — рассмотреть иные классы $*$-полуколец и получить их пучковые представления.

Напомним основные используемые понятия. Полукольцо S называется $*$-полукольцом (или полукольцом с инволюцией), если существует антиавтоморфизм $* : a \mapsto a^*$ полукольца S первого или второго порядка:

$$a^{**} = a, \quad (a+b)^* = a^* + b^*, \quad (ab)^* = b^*a^*.$$

Дополняемый идемпотент $e \in S$ называется *проекцией*, если $e = e^*$. Центральный дополняемый самосопряженный идемпотент называется *центральной проекцией*; элемент $c(a)$ $*$-полукольца S называется *центральным покрытием элемента* $a \in S$, если $ac(a) = a$ и $c(a)$ — наименьшая центральная проекция с таким свойством.

Идеал A $*$-полукольца назовем *центральным*, если $a \in A$ влечет $c(a) \in A$. Центральный собственный идеал P назовем *первичным центральным идеалом*, если для любых центральных идеалов A, B из $AB \subseteq P$ следует $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$.

Определение. *Полукольцо с инволюцией S называется бирегулярным $*$-полукольцом, если каждый главный идеал порождается некоторой проекцией, т. е. для любого $a \in S$ $SaS = eS$ для некоторой проекции e.*

Множество $\mathrm{Sp}\ S$ всех центральных первичных идеалов бирегулярного $*$-полукольца S со стоуновской топологией становится нульмерным компактом. Пусть сейчас S — бирегулярное $*$-полукольцо, $P \in \mathrm{Sp}\ S$. Для любых $a, b \in S$ и любого центрального первичного идеала $P \in \mathrm{Sp}\ S$ положим:

$$a \equiv b \mod \lambda_P \Leftrightarrow ae = be \text{ для некоторой центральной проекции } e \in P$$

Введенное отношение является конгруэнцией на $*$-полукольце, и для произвольного бирегулярного $*$-полукольца S строится пучок $*$-полуколец

$$(\mathbb{L}(S), \mathrm{Sp}\ S), \text{ где } \mathbb{L}(S) = \dot{\cup} S/\lambda_P, P \in \mathrm{Sp}\ S.$$

Основным результатом является

Теорема 1. *Произвольное бирегулярное $*$-полукольцо S $*$-изоморфно $*$-полукольцу всех глобальных сечений пучка $(\mathbb{L}(S), \mathrm{Sp}\ S)$.*

Дальнейшим развитием темы является установление взаимосвязи между пирсовским представлением [2, п. 4] и $*$-аналогом представления Корниша [3, § 4.2, § 5.2].

С основными понятиями и свойствами полуколец с инволюцией и пучковых представлений можно познакомиться в [2, 3].

Список литературы

[1] Н. С. Протасов, В. В. Чермных. О пучковом представлении *pq*-бэровского полукольца с инволюцией. *Труды Института Математики и Механики УрО РАН*, **30**: 1 (2024), 190–202.

[2] Р. В. Марков. Пирсовское представление полуколец с инволюцией. *Изв. вузов. Матем.*, **4** (2014), 18–24.

[3] В. В. Чермных. Функциональные представления полуколец. *Фундамент. и прикл. матем.*, **17**: 3 (2012), 111–227.

О программе Виланда и ее модификации[1]

Ревин Д. О.
ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия, ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
revin@g.math.nsc.ru

Будут обсуждаться подходы к решению следующей естественной задачи, восходящей к работам Галуа и Жордана. Дана конечная группа G и класс конечных групп $\mathfrak{X}$ со свойствами, напоминающими свойства класса разрешимых групп, а именно, предполагается, что $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений. Как найти подгруппы группы G, принадлежащие $\mathfrak{X}$? Ясно, что можно ограничиться поиском представителей классов сопряженности максимальных $\mathfrak{X}$-подгрупп. Одна из основных сложностей в решении этой задачи в том, что она плохо сводится к факторам нормальных и субнормальных рядов. В докладе особое внимание будет уделено идеям Х. Виланда и его программе 1979 года [1] по преодолению этой трудности. Будет также рассказано о прогрессе в выполнении этой программы, достигнутому в последние годы и приведшему к необходимости ее модификации.

Список литературы

[1] H. Wielandt. Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute, Finite groups, Santa Cruz Conf. 1979, Proc. Symp. Pure Math. **37** (1980), 161–173.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00163).

О различных и нечетных разбиениях натуральных чисел

Самойлов А.А.
Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия
samoilovaa@susu.ru

Разбиение $\lambda = (a_1, \ldots, a_k)$ натурального числа n — представление этого числа в виде суммы положительных целых чисел $a_1, \ldots, a_k$. В этом случае слагаемые называются частями разбиения, а количество частей — длиною разбиения.

Функция разбиения — это функция, которая показывает, сколькими возможными способами можно разбить заданное натуральное число n. В прикладных задачах используются разбиения, на которые накладываются условия

$$p(n \mid \text{некоторое условие}). \tag{1}$$

В данной работе рассмотрим разбиения, когда a_i нечетно при $1 \leq i \leq k$ и $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Такие разбиения называются различными и нечетными. Первый вопрос связан о количестве таких разбиений

$$r(n) = p(n \mid a_i \text{ нечетно и различно}). \tag{2}$$

Для решения этой задачи был предложен и реализован алгоритм с использованием подхода динамического программирования.

Второй вопрос связан с максимальным слагаемым k_{max} функции разбиения $r(n, k)$. Используя предложенный алгоритм, можно произвести расчеты до некоторого большого n и оценить поведение значений максимальных слагаемых разделив на четное и нечетное k_{max} (рис. 1). Для k_{max} можно выделить несколько свойств: $n - k_{max} =$ четное и $1 \leq k_{max} \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. График значений максимальных слагаемых k_{max} имеет форму $\sqrt{n}$ и нуждается в дальнейшем изучении.

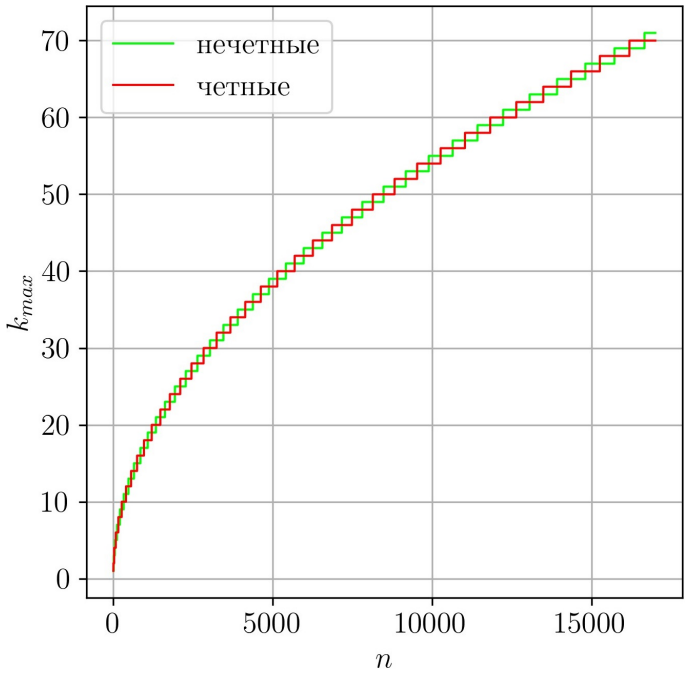


Рис. 1: Максимальное слагаемое k_{max}

Третий вопрос связан с оценкой ранга группы центральных единиц целочисленного группового кольца знакопеременной группы A_n с помощью разбиений [1]. Для этого к условиям различности и нечетности добавим третье ограничение $n \equiv k \pmod 4$

$$r_4(n) = p(n \mid a_i \text{ нечетно и различно, и } n \equiv k \pmod 4). \tag{3}$$

В 2012 году Каргаполовым [2] был посчитан результат для $n \leq 1000$ и выдвинуты предположения, связанные с оценкой ранга группы центральных единиц целочисленного группового кольца знакопеременной группы A_n.

Теорема 1. *(Теорема 3.1 [2]). При $n \to \infty$ имеет место следующая асимптотическая формула*

$$r(n) \sim \frac{1}{2\lambda_n^{\frac{3}{2}}\sqrt[4]{24}} e^{\frac{\pi\lambda_n}{\sqrt{6}}}, \text{ где } \lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}. \tag{4}$$

Гипотеза Каргаполова при $n \to \infty$:

$$r_4(n) \sim \frac{r(n)}{2}. \tag{5}$$

Была посчитана относительная погрешность по следующей формуле

$$\delta(n) = \frac{|r_{4\text{гип}}(n) - r_4(n)|}{r_4(n)}. \tag{6}$$

Результаты представлены в табл. 1. При небольших значениях n присутствуют резкие колебания значений количества разбиений, но с возрастанием n они сглаживаются. Начиная с $n = 1000$, относительная погрешность постоянно уменьшается. Таким образом, гипотезу Каргаполова можно применять на практике.

Таблица 1: Проверка гипотезы

n	$r_4(n)$	$\delta(n), \%$	n	$r_4(n)$	$\delta(n), \%$
100	1.01×10^3	31.349	10 000	5.65×10^{51}	0.294
200	1.72×10^5	7.327	20 000	3.97×10^{74}	0.208
300	6.52×10^6	6.530	30 000	1.48×10^{92}	0.169
400	1.73×10^8	0.939	40 000	1.00×10^{107}	0.147
500	3.04×10^9	0.088	50 000	1.20×10^{120}	0.131
600	4.01×10^{10}	2.123	60 000	8.06×10^{131}	0.120
700	4.46×10^{11}	1.533	70 000	6.14×10^{142}	0.111
800	4.24×10^{12}	0.627	80 000	8.31×10^{152}	0.104
900	3.50×10^{13}	0.772	90 000	2.74×10^{162}	0.098
1000	2.58×10^{14}	1.105	100 000	2.77×10^{171}	0.093

Список литературы

[1] R. A. Ferraz. Simple components and central units in group algebras. *Journal of Algebra*, **279**: 1 (2004) 191–203.

[2] А. В. Каргаполов. Центральные единицы целочисленных групповых колец знакопеременных групп: дис. . . . канд. / Каргаполов Андрей Валерьевич. Южно-Уральский Государственный Университет, Россия, 2012.

Минимальные 4-порождённые решётки, не близкие к дистрибутивным

Селиванов К. В.
УрФУ, Екатеринбург, Россия
ckirill2000@mail.ru

Определение. [1] *Решётка называется близкой к дистрибутивной, если для любых элементов x, y и z интервалы*

$$[(x \wedge z) \vee (y \wedge z); (x \vee y) \wedge z] \text{ и } [(x \wedge y) \vee z; (x \vee z) \wedge (y \vee z)]$$

имеют длину, не большую 1.

Это вполне естественное расширение класса дистрибутивных решёток.

Хорошо известно, что минимальными недистрибутивными решётками являются «диамант» и «пентагон». Их наличие или отсутствие в решётке в качестве подрешётки определяет, является ли решётка дистрибутивной.

Естественно, рассмотреть аналогичный вопрос для решёток, близких к дистрибутивным, т.е. найти в классе решёток, не являющихся близкими к дистрибутивным, минимальные. Нами доказано, что класс решёток, минимальных и не близких к дистрибутивным, можно разделить на два подкласса, 3-порождённых решёток и 4-порождённых. Нами полностью описан подкласс 4-порожденных минимальных не близких к дистрибутивным решёток. В этом подклассе 5 самодвойственных решёток и 13 пар двойственных решёток.

В докладе предполагается изложить методику получения результата для подкласса 4-порожденных решёток, минимальных в классе всех не близких к дистрибутивным.

Список литературы

[1] А. Г. Гейн, И. Д. Маслинцын, К. Э. Маслинцына, К. В. Селиванов. О 3-порождённых решетках, близких к дистрибутивных. *Алгебра и логика*, **62**: 4 (2023), 504–523.

О периодических группах Шункова насыщенных прямыми произведениями полудиэдральных групп[1]

Сенашов В.С.
Сибирский Федеральный Университет, Красноярск, Россия
Vasily.Senashov@yandex.ru

Филиппов К.А.
Сибирский Федеральный Университет, Красноярск, Россия
filippov_kostya@mail.ru

Шлепкин А.К.
Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия
ak_kgau@mail.ru

Определение 1. Пусть $\Re$ — множество групп. Будем говорить, что группа G *насыщена* группами из $\Re$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\Re$ [1,2].

Определение 2. Группа G называется полудиэдром, если $D = \langle d \rangle \leftthreetimes \langle i \rangle, d^{4n} = i^2 = 1, d^i = d^{2n-1}$. Будем называть группу D локально конечным полудиэдром, если она является объединением бесконечной возрастающей цепочки конечных полудиэдров D_i:

$$D_1 < \ldots < D_i < \ldots,$$

$$D = \cup_{i=1}^{\infty} D_i$$

[3].

Определение 3. Группа G называется группой Шункова (сопряженно-бипримитивно конечной группой), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу [4].

В [5] Доказана

Теорема 1. Пусть G — локально конечная группа, насыщенная группами из множества

$$\mathfrak{M} = \{R_1^{(n)} \times \cdots \times R_d^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\},$$

d — фиксированное натуральное число, $R_i^{(n)}$ — полудиэдры. Тогда

$$G = A_1 \times \cdots \times A_d,$$

где A_i — (локально) конечные ролудиэдры.

В настоящей работе данный результат переносится на периодические группы Шункова.

Теорема 2. Пусть G — группа Шункова, насыщенная группами из множества

$$\mathfrak{M} = \{R_1^{(n)} \times \cdots \times R_d^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\},$$

d — фиксированное натуральное число, $R_i^{(n)}$ — полудиэдры. Тогда

$$G = A_1 \times \cdots \times A_d,$$

[1]Работа первого автора выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-41-10004).

Список литературы

[1] А. К. Шлепкин. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы. *Сборник тезисов III международной конференции по алгебре.* Красноярск, 1993, 369.

[2] А. К. Шлепкин. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами. *Матем. тр. ИМ СО РАН.*, **1**: 1 (1998), 129–138.

[3] Л. Р. Тухватулина. О периодических группах, насыщенных полудиэдрами. *Материалы V Всесибиского конгрессы женщин-математиков.* Красноярск: РИО СФУ, 2008, 394.

[4] А. В. Рожков. Условия конечности Шункова. *Междунар. конф. по алгебре.* Санкт-Петербург, 1997, 268–269.

[5] К. А. Филиппов, А. К. Шлепкин. О локально конечных группах насыщенных прямыми произведениями полудиэдральных. *Мальцевские чтения.* Новосибирск, 2024, 107.

О прямых произведениях групп диэдра[1]

Сенашов В.С.
Сибирский Федеральный Университет, Красноярск, Россия
Vasily.Senashov@yandex.ru

Шлепкин А.А.
Сибирский Федеральный Университет, Красноярск, Россия
shlyopkin@mail.ru

Пусть $\mathfrak{R}$ — множество групп. Будем говорить, что группа G *насыщена* группами из $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$ [1, 2]. В [3] поставлен Вопрос 1 (Л.С. Казарин, Б. Амберг):

Будет ли разрешимой периодическая группа, у которой любая конечная подгруппа содержится в подгруппе, изоморфной прямому произведению d конечных групп диэдра ? В случае $d = 1$ это так.

В [4] установленная структура локально конечой группы, насыщенная прямымыми произведениями двух групп диэдра с тривиальным центром. Естественно было попытаться получить аналогияный результат в классе групп Шункова. Напомним, что группа G называется группой Шункова (сопряженно-бипримитивно конечной группой), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу. Как следует из работ А.В. Рожкова и других математиков, группы Шункова отличны от локально конечных групп и периодических групп [5] . Кроме того, построены примеры групп Шункова, содержащих элементы бесконечного порядка и не обладающих периодической частью [6]. Под периодической частью группы понимается множество всех элементов конечного порядка группы при условии, что они образуют подгруппу.

В [7] доказана следующая теорема

Теорема 1. Пусть группа Шункова G не содержит элементов порядка 4 и насыщена группами из множества

$$\mathfrak{M} = \{(D_i \leftthreetimes \langle t_i \rangle) \times (R_i \leftthreetimes \langle v_i \rangle) \mid i \in \mathbb{N}\},$$

где D_i, R_i — конечные циклические группы ; t_i, v_i — инволюции; для любого $d \in D_i, d^{t_i} = d^{-1}$; для любого $r \in R_i^1, r^{v_i} = r^{-1}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$ и

$$T(G) = (D \leftthreetimes \langle t \rangle) \times (R \leftthreetimes \langle v \rangle),$$

где D, R — локально циклические группы; t, v — инволюции; для любого $d \in D, d^t = d^{-1}$; для любого $r \in R, r^v = r^{-1}$.

В данной работе удалось избавиться от ограничения на количество прямых множителей в условии теоремы 1. Доказана следующая

Теорема 2. Пусть группа Шункова G не содержит элементов порядка 4, d — фиксированное натуральное число и G насыщена группами из множества

$$\mathfrak{M} = \{(D_i^{(1)} \leftthreetimes \langle t_i^{(1)} \rangle) \times ... \times (D_i^{(d)} \leftthreetimes \langle t_i^{(d)} \rangle) \mid i \in \mathbb{N}\},$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-41-10004).

где $D_i^{(j)}$ — конечные циклические группы $(1 \leq j \leq d)$; $t_i^{(j)}$ — инволюции; для любого $x \in D_i^{(j)}, x^{t_i^{(j)}} = x^{-1}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$ и

$$T(G) = (D^{(1)} \leftthreetimes \langle t^{(1)} \rangle) \times .... \times (D^{(d)} \leftthreetimes \langle t^{(d)} \rangle)),$$

где $D^{(j)}$ — локально циклические группы; $t^{(j)}$ — инволюции; для любого $x \in D^{(j)}, x^{t^{(j)}} = x^{-1}$.

Список литературы

[1] А. К. Шлепкин. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы. *Сборник тезисов III международной конференции по алгебре.* Красноярск, 1993, 369.

[2] А. К. Шлепкин. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами. *Матем. тр. ИМ СО РАН.*, **1**: 1 (1998), 129–138.

[3] И. Н. Белоусов, А. С. Кондратьев, А. В. Рожков. XII школа конференция посвященная 65-летию со дня рождения А.А. Махнева. *Тр. ИММ УрО РАН.*, **24**: 3 (2018), 281–285.

[4] А. В. Кухарев, А. А. Шлепкин. Локально конечные группы, насыщенные прямым произведением двух конечных групп диэдра. *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика.*, **44** (2023), 71–81.

[5] А. В. Рожков. Условия конечности Шункова. *Междунар. конф. по алгебре.* Санкт-Петербург, 1997, 268–269.

[6] А. А. Череп. О множестве элементов конечного порядка в бипримитивно конечной группе. *Алгебра и логика*, **26**: 4 (1987), 518–521.

[7] В. С. Сенашов, А. А. Шлепкин. О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями групп диэдра. *Сборник тезисов Международной (55-ой всероссийской) молодежной школы-конференции "Современные проблемы математики и ее приложений".* Екатеринбург, 2024, 26.

О существовании некоторых r-паркетогранников и несуществовании правильногранных тел с данным комбинаторным строением[1]

Тимофеенко А.В.
Красноярский математический центр, Красноярск, Россия
A.V.Timofeenko62@mail.ru

В 2021 г. стало известно, [1], о существовании выпуклого 19-гранника, полученного из икосаэдра заменой его треугольной и смежных с ней трёх треугольных граней на три ромба с общей вершиной. При этом изменились оставшиеся двугранные углы, образованные смежными гранями икосаэдра, каждый угол ромбической грани отличается от прямого меньше, чем на $1,5^\circ$, а все треугольные грани остались правильными. В текущем учебном году на семинаре «Группы и паркетогранники» представлены и другие мало отличающиеся от правильногранных тел многогранники. Для каждого из них доказано – независимо от классификационной теоремы Залгаллера [2] – несуществование правильногранника с равным этому телу комбинаторным строением. Рассмотрим алгебраическую модель одного из таких тел, комбинаторно близкому «Опоясанному двуклиннику» M_{24} (тело Джонсона J_{90}). Рассматривая изображение этого правильногранника, [3], см. также SageMath-модель[1], трудно не заметить, что поверхность тела M_{24} разрезается по рёбрам на три поверхности: комбинаторно равную боковой поверхности антипризмы с 6-угольными основаниями полоску из 12 треугольников и две одинаковые 6-гранные поверхности, в каждой из которых кроме двух смежных квадратов в их общих вершинах собраны ещё по два (смежных) треугольника. Отметим также, что общие рёбра квадратных граней тела M_{24} перпендикулярны. Повернём одну из рассмотренных 6-гранных частей так, чтобы угол (скрещивающихся) прямых, содержащих общие рёбра квадратов полученного тела, стал острым. Естественно, для соединения вновь трёх этих частей придётся изменить двугранные углы между смежными гранями, а также длины некоторых рёбер. Полученный так 24-гранник и любой комбинаторно ему равный многогранник будем обозначать M_{24a}, см. модель[2].

Теорема. *Множество вершин многогранника M_{24a} равно объединению орбит точек*

$$\left(a\sqrt{2}-b, a+b\sqrt{2}, h\right), \left(-b(1+\sqrt{2}), a(1+\sqrt{2}), h\right), \left(-a\sqrt{2}-b, a-b\sqrt{2}, h\right), \left(-b, a, h+\sqrt{2}/2\right),$$

где $a=\sqrt{18+6\sqrt{6}}/12$, $b=\sqrt{18-6\sqrt{6}}/12$, $h=\sqrt{2\sqrt{6}-2}/4$, *при действии группой*

$$[2,2]^+ \cong \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

В рассмотренной выше «живой» SageMath-модели многогранника M_{24a} числами 1, 2, 3, 4 помечены точки из теоремы. Таким образом, фундаментальных вершин 24-гранника M_{24a} стало на одну больше, чем у «Опоясанного двуклинника» M_{24}. Причина в том, что в отличие от M_{24} тело M_{24a} не обладает несобственными симметриями: $[2,2]^+ = AutM_{24a} < AutM_{24} = [2^+,4]$.

Следствие. *Четырёхугольные грани модели тела M_{24a} являются квадратами и с точностью до симметрии за исключением двух её рёбер все рёбра единичные. Исключения равны*

$$\sqrt{1+\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}} \approx 1,12228 \text{ и } \sqrt{1+\frac{\left(\sqrt{3}+3\right)\sqrt{2}}{6}-\frac{2\sqrt{3}}{3}} \approx 0,9801.$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Красноярского математического центра .
[1]https://sagecell.sagemath.org/?q=inufah
[2]https://sagecell.sagemath.org/?q=xypadw

Построенная модель тела M_{24a} интересна и тем, что рассмотренные выше её 6-гранные части входят в состав других правильногранников, которые планируется продемонстрировать на лекции. Однако, для доказательства несуществования правильногранника с комбинаторным строением M_{24a} построенную модель необходимо усложнить. Для этого, как и в работе [3], вводится параметр, равный величине угла, образованного смежными квадратными гранями. Затем координаты вершин записываются как функции от синуса половины этого угла. Требование равнорёберности многогранника приводит к уравнениям, решения которых и позволят сделать необходимый вывод о несуществовании правильногранника M_{24a}. Вычисления становятся прозрачными при обращении к системам компьютерной алгебры и графики, что и будет сделано на лекции.

Список литературы

[1] В. И. Субботин. О существовании RR-многогранников, связанных с икосаэдром. *Чебышевский сб.*, **22**: 4 (2021), 253–264.

[2] В. А. Залгаллер. Выпуклые многогранники с правильными гранями. *Зап.научн. сем. ЛОМИ.*, **2** (1967), 5–221.

[3] А. В. Тимофеенко. Несоставные многогранники, отличные от тел Платона и Архимеда. *Фундамент. и прикл. матем.*, **14**: 2 (2008), 179–205.

Конкретная характеризация универсальных частичных графовых полуавтоматов над рефлексивными графами

Фарахутдинов Р.А.
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия
renatfara@mail.ru

Основные определения. Далее всюду под графом будем понимать ориентированный граф.

Следуя [1], под частичным преобразованием множества X понимается однозначное бинарное отношение $f \subset X \times X$ с областью определения $\mathrm{dom}\ f$ и множеством значений $\mathrm{Im}\ f$. Симметрическая полугруппа всех частичных преобразований множества X обозначается $W(X)$. Для частичного преобразования f множества X обозначим $f^2(x, y) = (f(x), f(y))$ для элементов $x, y \in X$.

Частичное преобразование f множества X называется частичным эндоморфизмом графа $G = (X, \rho)$, если для любых $x, y \in \mathrm{dom}\ f$ из $(x, y) \in \rho$ следует $(f(x), f(y)) \in \rho$. Множество всех частичных эндоморфизмов графа G с композицией образуют полугруппу $\mathrm{PEnd}(G)$, которая называется полугруппой частичных эндоморфизмов графа G.

Под частичным полуавтоматом понимается алгебраическая система $A = (X, S, \star)$, состоящая из непустого множества состояний X, полугруппы входных сигналов $S = (S, \cdot)$ и частичной функции переходов $\star : X \times S \to X$, согласованной с операцией умножения полугруппы по правилу $x \star (s_1 \cdot s_2) = (x \star s_1) \star s_2$ для любых $x \in X$, $s_1, s_2 \in S$, удовлетворяющих условию (x, s_1), $(x \star s_1, s_2)$, $(x, s_1 \cdot s_2) \in \mathrm{dom}\ \star$. Для каждого входного сигнала $s \in S$ частичного полуавтомата определена частичная функция переходов $\delta_s(x) = x \star s$, где $(x, s) \in \mathrm{dom}\ \star$.

Частичный полуавтомат $A = (X, S, \star)$ называется графовым, если множество его состояний X наделено такой структурой графа $G = (X, \rho)$, что для любого входного сигнала $s \in S$ частичная функция переходов δ_s является частичным эндоморфизмом графа G. Символически такие полуавтоматы обозначаются $A = (G, S, \star)$. Графовый полуавтомат $\mathrm{PAtm}(G) = (G, \mathrm{PEnd}(G), \star)$ с полугруппой $\mathrm{PEnd}(G)$ всех частичных эндоморфизмов графа G является универсально притягивающим объектом в категории [2] частичных графовых полуавтоматов над графом G и называется универсальным частичным графовым полуавтоматом.

Входной сигнал $s \in S$ частичного графового полуавтомата $A = (G, S, \star)$ называется 3-ограниченным, если $|\mathrm{dom}\ s| < 3$. Обозначим $S_3 = \{s \in S : |\mathrm{dom}\ s| < 3\}$. В частности, $\mathrm{PEnd}_3(G)$ обозначает полугруппу всех 3-ограниченных частичных эндоморфизмов графа G. Если $A = (X, S, \star)$ — частичный полуавтомат, то через A_3 обозначается частичный полуавтомат с полугруппой входных сигналов S_3 и частичной функцией переходов $\star_3$, являющейся ограничением функции переходов $\star$ на $X \times S_3 \to X$.

Пусть S — подполугруппа полугруппы T. Правым идеализатором S в T называется наибольшая подполугруппа T, содержащая S в качестве правого идеала [3].

На множестве состояний X частичного полуавтомата $A = (X, S, \star)$ введём предикат $\Pi(u, v, x, y)$ по формуле

$$\Pi(u, v, x, y) = (\exists s \in S)(\mathrm{dom}\ s = \{u, v\} \wedge u \star s = x \wedge v \star s = y).$$

Конкретная характеризация. Проблема конкретной характеризации универсальных частичных графовых полуавтоматов над рефлексивными графами заключается в следующем: при каких условиях частичный полуавтомат $A = (X, S, \star)$ является универсальным частичным графовым полуавтоматом, то есть на множестве состояний X полуавтомата A можно так задать бинарное отношение ρ, что для графа $G = (X, \rho)$ выполняется равенство $A = \mathrm{PAtm}(G)$?

Пусть $A = (X, S, \star)$ — частичный полуавтомат. Определим следующие канонические отношения полугруппы входных сигналов S по формулам:

$$\beta = \cup\{f^2 : f \in S\}, \quad P = \{(x, y) \in X^2 \backslash \Delta_X : X^2 \subset \beta(x, y)\},$$
$$R = \{(x, y) \in X^2 : X^2 \backslash \Delta_X \subset \beta^{-1}(x, y)\}, \quad Q = X^2 \setminus (P \cup R).$$

Пусть $A = (X, S, \star)$ — частичный полуавтомат. С помощью канонических отношений этого автомата зададим на полугруппе его входных сигналов S следующие условия C_i:

$$C_1 = (P \cap R \neq \emptyset); \quad C_2 = (P \cap R = Q = \emptyset); \quad C_3 = (Q \neq \emptyset)$$

и бинарные отношения $\sigma_{i,j}$: $\sigma_{1,1} = \Delta_X$; $\sigma_{1,2} = X^2$; $\sigma_{2,1} = R$; $\sigma_{3,1} = \beta(x_0, y_0)$ и $\sigma_{3,2} = \sigma_{3,1}^{-1}$ для некоторой пары $(x_0, y_0) \in Q$.

Следующая теорема даёт достаточные условия для того, чтобы произвольный полуавтомат с полугруппой 3-ограниченных частичных преобразований множества состояний был равен универсальному частичному графому полуавтомату с полугруппой 3-ограниченных частичных эндоморфизмов рефлексивного графа состояний.

Теорема 1. *Пусть $A = (X, S, \star)$ — частичный полуавтомат без равнодействующих входных сигналов, у которого полугруппа входных сигналов S является полугруппой 3-ограниченных частичных преобразований множества X и канонические отношения этого полуавтомата удовлетворяют условиям*

(A_1) предикат $\Pi(x, y, z, z)$ истинен для всех $x, y, z \in X$;

(A_2) $\Pi(x, y, u, v) \wedge \Pi(x, y, v, u) \Longrightarrow (x, y) \in P \vee (u, v) \in R$;

(A_3) для любых $(x_i, y_i) \in Q$, $1 \leq i \leq 3$, выполняются следующие условия:

$$(\Pi(x_1, y_1, x_2, y_2) \Longleftrightarrow \Pi(x_1, y_1, x_3, y_3)) \Rightarrow \Pi(x_2, y_2, x_3, y_3)$$
$$\text{и } (\Pi(x_1, y_1, x_3, y_3) \Longleftrightarrow \Pi(x_2, y_2, x_3, y_3)) \Rightarrow \Pi(x_1, y_1, x_2, y_2).$$

Тогда верны следующие утверждения:

1) *канонические отношения полуавтомата A удовлетворяют одному из условий C_i, $1 \leq i \leq 3$;*
2) *если канонические отношения полуавтомата A удовлетворяют условию C_i, то выполняется равенство $A = \mathrm{PAtm}_3(G)$ для всех рефлексивных графов $G = (X, \sigma_{i,j})$ с любым из значений j.*

Следующая теорема даёт конкретную характеристику универсальных частичных графовых полуавтоматов с помощью канонических отношений полугруппы входных сигналов.

Теорема 2. *Пусть $A = (X, S, \star)$ — частичный полуавтомат без равнодействующих входных сигналов, у которого полугруппа входных сигналов S является полугруппой частичных преобразований множества состояний X. Тогда полуавтомат A в том и только том случае является универсальным частичным графовым полуавтоматом $\mathrm{PAtm}(G) = (G, \mathrm{PEnd}(G), \star)$ над некоторым рефлексивным графом $G = (X, \rho)$, когда S является правым идеализатором своей подполугруппы S_3 в симметрической полугруппе $W(X)$, и канонические отношения полуавтомата A удовлетворяют условиям $(A_1) - (A_3)$.*

Список литературы

[1] В. В. Вагнер. Полугруппы частичных преобразований с симметричным отношением транзитивности. *Изв. вузов. Матем.*, **1** 1957, 81–88.

[2] Б. И. Плоткин, Л. Я. Гринглаз, А. А. Гварамия. Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высш. шк., 1994.

[3] А. Клиффорд, Г. Престон. Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972.

Сильная π-теорема Силова для простых групп лиева типа малых рангов[1]

Шепелев В. Д.
НГУ, ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия
v.shepelev@g.nsu.ru

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Конечная группа называется *π-группой*, если все простые делители ее порядка принадлежат π. В соответствии с определением Х. Виланда конечная группа удовлетворяет *сильной π-теореме Силова*, если максимальные π-подгруппы любой ее подгруппы H сопряжены в H.

Виланд [1, вопрос (h)] поставил вопрос о классификации конечных простых групп, удовлетворяющих сильной π-теореме Силова. Н. Ч. Манзаева [2] описала простые спорадические и знакопеременные группы, удовлетворяющие сильной π-теореме Силова. В 2024 году в работе [3] были найдены условия, характеризующие выполнение сильной π-теоремы Силова для групп из серии $L_2(q)$.

В докладе в терминах естественных арифметических параметров будут приведены необходимые и достаточные условия для того, чтобы конечные простые группы лиева типа, принадлежащие сериям ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$, $U_3(q)$ и $L_3(q)$ удовлетворяли сильной π-теореме Силова.

Список литературы

[1] H. Wielandt. Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute. Finite groups, Santa Cruz Conf. 1979, Proc. Symp. Pure Math. **37** (1980), 161–173.

[2] Н. Ч. Манзаева. Решение проблемы Виланда для спорадических групп. *Сиб. электрон. матем. изв.*, **9** (2012), 294–305.

[3] Д. О. Ревин, В. Д. Шепелев. Сильная π-теорема Силова для групп $\mathrm{PSL}_2(q)$. *Сиб. матем. журн.*, **65** (2024), 1011–1021.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00163).

$AT4(4,6,5)$-граф не существует[1]

Юань Юань
Хайнаньский университет, г. Хэйкоу, Китай
yyuan@hainanu.edu.cn

Махнев А. А.
Хайнаньский университет, Хэйкоу, Китай
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
e-mail@imm.uran.ru

Климин В. С.
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
kliminvasily@yandex.ru

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и $\theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ — собственные значения Γ. Тогда выполняется фундаментальная граница

$$(\theta_1 + \frac{k}{a_1+1})(\theta_d + \frac{k}{a_1+1}) \geq -\frac{ka_1b_1}{(a_1+1)^2}.$$

Положим

$$b^+ = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_d},\ b^- = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_1}.$$

Недвудольный граф, для которого достигается равенство в фундаментальной границе, называется плотным. Граф является плотным тогда и только тогда, когда окрестность любой вершины в нем сильно регулярна с собственными значениями $a_1, p = b^+, -q = b^-$. В этом случае все параметры Γ выражаются через p, q, r и мы назовем Γ антиподальным плотным графом диаметра 4 с параметрами p, q, r ($AT4(p,q,r)$-графом).

В $AT4(q-2,q,r)$-графе Γ для любой вершины $u \in \Gamma$ подграф $\Gamma_2(u)$ является дистанционно регулярным графом диаметра 4 с массивом пересечений $\{(q-2)q^2, (q-1)^3, (r-1)q(2q-2)/r, 1; 1, q(2q-2)/r, (q-1)^3, (q-2)q^2\}$.

В работе рассмотрены графы с $q = 5$ и массивами пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$, $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$.

Определение *Тройные числа пересечений [3]*

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\{u_1u_2u_3; r_1r_2r_3\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, $[u_1u_2u_3; r_1r_2r_3] = |\{u_1u_2u_3; r_1r_2r_3\}|$. Числа $[u_1u_2u_3; r_1r_2r_3]$ называются тройными числами пересечений.

Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $[u_1u_2u_3; r_1r_2r_3]$ будем писать $[r_1r_2r_3]$.

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$, тогда справедливы следующие утверждения:

Лемма 1 *Числа пересечений графа Γ равны:*
$p^1_{11} = 18$, $p^1_{12} = 125$, $p^1_{22} = 1625$, $p^1_{23} = 500$, $p^1_{33} = 72$, $p^1_{34} = 4$, $p^1_{44} = 0$;
$p^2_{11} = 8$, $p^2_{12} = 104$, $p^2_{13} = 32$, $p^2_{22} = 1725$, $p^2_{23} = 416$, $p^2_{24} = 4$, $p^2_{33} = 128$, $p^2_{34} = 0$, $p^2_{44} = 0$;

[1]Исследование выполнено при поддержке Естественно научного фонда Китая (проект № 12171126) и гранта Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань.

$p^3_{12} = 125$, $p^3_{13} = 18$, $p^3_{14} = 1$, $p^3_{22} = 1625$, $p^3_{23} = 500$, $p^3_{24} = 0$, $p^3_{33} = 54$, $p^3_{34} = 3$, $p^3_{44} = 0$;
$p^4_{13} = 144$, $p^4_{22} = 2250$, $p^4_{23} = 0$, $p^4_{24} = 0$, $p^4_{33} = 432$, $p^4_{34} = 0$, $p^4_{44} = 3$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $\{rst\} = \{uvw; rst\}$ и $[rst] = [uvw; rst]$. Положим $\Sigma = \Gamma_2(u)$, $\Lambda = \Sigma_2$. Тогда Λ является регулярным графом степени $p^2_{22} = 1725$ на $k_2 = 2250$ вершинах.

Лемма 2 *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 2, d(v,w) = 1$. *Тогда верны равенства:*

$[111] = -3r_3/4 + r_4/4$, $[112] = [121] = 3r_3/4 - r_4/4 + 8$, $[122] = r_3/4 + r_4/4 + 64$, $[123] = [132] = -r_3 + 32$, $[133] = r_3$;

$[211] = -r_3/4 - r_4/4 + 18$, $[212] = [221] = r_3/4 + r_4/4 + 85$, $[222] = -5r_3/4 - 5r_4/4 + 1300$, $[223] = [232] = r_3 + r_4 + 340$, $[233] = -r_3 - r_4 + 72$, $[234] = [243] = 4$,

$[311] = r_3$, $[312] = [321] = -r_3 + 32$, $[322] = r_3 + r_4 + 256$, $[323] = [332] = -r_4 + 128$, $[333] = r_4$;

где $0 \le r_3 \le 18$, $0 \le r_4 \le 62$, $r_3 + r_4$ *делится на* 4 *и не больше* 72.

Лемма 3 *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 2, d(v,w) = 3$. *Тогда верны равенства:*

$[112] = -r_{14} + 8$, $[113] = r_{14}$, $[121] = -r_{12} + r_{13} - r_{14} + 8$, $[122] = r_{12} + r_{14} + 64$, $[123] = -r_{13} + 32$, $[131] = r_{12} - r_{13} + r_{14}$, $[132] = -r_{12} + 32$, $[133] = r_{13} - r_{14}$;

$[212] = [221] = r_{12} + r_{14} + 85$, $[213] = [231] = -r_{12} - r_{14} + 18$, $[214] = [241] = 1$, $[222] = -5r_{12} - 5r_{14} + 1300$, $[223] = [232] = 4r_{12} + 4r_{14} + 340$, $[233] = -3r_{12} - 3r_{14} + 54$, $[234] = [243] = 3$;

$[312] = -r_{12} + 32$, $[313] = r_{12}$, $[321] = -r_{13} + 32$, $[322] = 4r_{12} + 4r_{14} + 256$, $[323] = -4r_{12} + r_{13} - 4r_{14} + 128$, $[331] = r_{13}$, $[332] = -3r_{12} - 4r_{14} + 128$, $[333] = 3r_{12} - r_{13} + 4r_{14}$;

$[422] = 4$,

где $0 \le r_{12}, r_{13} \le 18$, $0 \le r_{14} \le 8$, $r_{12} + r_{14} \le 18$.

Лемма 4 *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 2, d(v,w) = 4$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

$[113] = [131] = 8$, $[122] = 104$;

$[213] = [231] = 104$, $[222] = 1725$, $[233] = 312$, $[244] = 3$;

$[313] = [331] = 32$, $[322] = 416$, $[333] = 96$;

$[422] = 4$.

Лемма 5 *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

$[111] = r_{10}$, $[112] = [121] = -r_{10} - r_9 + 8$, $[113] = [131] = r_9$, $[122] = r_7$, $[123] = [132] = r_{10} + r_9 - r_7 + 96$, $[133] = r_8$;

$[211] = -r_{10} - r_9 + 8$, $[212] = [221] = r_7$, $[213] = [231] = -r_8 - r_9 + 32$, $[222] = -5r_7 + 1720$, $[223] = [232] = 4r_7$, $[224] = [242] = 4$, $[233] = -4r_7 + r_8 + r_9 + 384$;

$[311] = r_9$, $[312] = [321] = r_{10} - r_7 + r_9 + 96$, $[313] = [331] = r_8$, $[322] = 4r_7$, $[323] = [332] = -r_{10} - 3r_7 - r_9 + 320$, $[333] = r_{10} + 3r_7 + r_9 - r_8 - 192$;

$[422] = 4$,

где $64 \le r_7 \le 104$, $r_8 + r_9 \le 32$, $r_9 + r_{10} \le 8$.

Теорема *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$ *не существует.*

Следствие *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ *(*$AT4(4,6,5)$*-граф) не существует.*

Список литературы

[1] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier. Distance-Regular Graphs. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1989. 495.

[2] A. Jurisic, J. Koolen, P. Terwilliger. Tight distance-regular graphs. *J. Algebr. Comb.*, **12** (2000), 163–197.

[3] K. Coolsaet, A. Jurishich. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of sertain distance-regular graphs. *J. Comb. Theory, Series A.*, **115** (2008), 1086–1095.

Local and 2-local anti-derivation on maximal solvable Lie algebras whose nilradical are Heisenberg and abelian Lie algebras

Atajonov X. O.
Department of Algebra and Mathematical engineering, Urgench State University,Alimdjan street, 14, Urgench 220100, Uzbekistan
e-mail:atajonovxusainboy@gmail.com

Vaisova N. Z.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, 9, Univesity street, 100174 Tashkent, Uzbekistan
e-mail:nafosat_vaisova@mail.ru

Yusupov B. B.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, 9, Univesity street, 100174 Tashkent, Uzbekistan
e-mail:baxtiyor_yusupov_93@mail.ru

The notion of δ-derivations was introduced by V.Filippov for Lie algebras in [1, 2]. The space of δ-derivations includes usual derivations ($\delta = 1$), anti-derivations ($\delta = -1$) and elements from the centroid. In [2] it was proved that prime Lie algebras, as a rule, do not have nonzero δ-derivations (provided $\delta \neq 1, -1, 0, \frac{1}{2}$), and all $\frac{1}{2}$-derivations of an arbitrary prime Lie algebra A over the field $\mathbb{F}$ of characteristic $p \neq 2, 3$ with a non-degenerate symmetric invariant bilinear form were described. It was proved that if A is a central simple Lie algebra over a field of characteristic $p \neq 2, 3$ with a non-degenerate symmetric invariant bilinear form, then any $\frac{1}{2}$-derivation φ has the form $\varphi(x) = \lambda x$ for some $\lambda \in \mathbb{F}$.

Nowadays, local and 2-local operators have become popular for some non-associative algebras such as the Lie, Jordan, and Leibniz algebras. The notions of local derivations were introduced in 1990 by Kadison [5] and Larson, Sourour [9]. Later in 1997, Šemrl introduced the notions of 2-local derivations and 2-local automorphisms of algebras [10].

Investigation of local and 2-local δ-derivations on Lie algebras was initiated in [6] by A.Khudoyberdiyev and B.Yusupov. Namely, in [6] we introduced the notion of local and 2-local δ-derivations and describe local and 2-local $\frac{1}{2}$-derivation of finite-dimensional solvable Lie algebras with filiform, Heisenberg, abelian nilradicals. Moreover, we gave the description of local $\frac{1}{2}$-derivation of oscillator Lie algebras, conformal perfect Lie algebras, and Schrödinger algebras. B.Yusupov, V.Vaisova and T.Madrakhimov proved similar results concerning local $\frac{1}{2}$-derivations of naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras of type I in their recent paper [11]. They proved that quasi-filiform Leibniz algebras of type I, as a rule, admit local $\frac{1}{2}$-derivations which are not $\frac{1}{2}$-derivations.

Definition 1. Let $(\mathfrak{L}, [-,-])$ be an algebra with a multiplication $[-,-]$. A linear map φ is called a δ-derivation if it satisfies

$$\varphi[x, y] = \delta\big([\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)]\big),$$

where δ from the ground field $\mathbb{F}$.

Note that 1-derivation is a usual derivation and (-1)-derivation is called an anti-derivation. If φ_1 and φ_2 are δ_1 and δ_2-derivations, respectively, then their commutator $[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_1\varphi_2 - \varphi_2\varphi_1$ is a $\delta_1\delta_2$-derivation. The set of all δ-derivations, for the fixed δ, we denote by $\mathrm{Der}_\delta(\mathfrak{L})$. For the Lie algebras, the notion of anti-derivations coincides with the notion of reverse derivations, which was studied by Herstein in [4].

Definition 2. A linear map Δ is called a local δ-derivation, if for any $x \in \mathfrak{L}$, there exists a δ-derivation $\varphi_x : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ (depending on x) such that $\Delta(x) = \varphi_x(x)$. The set of all local δ-derivations on $\mathfrak{L}$ we denote by $\mathrm{LocDer}_\delta(\mathfrak{L})$.

Definition 3. A map $\nabla : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ (not necessary linear) is called a 2-local δ-derivation, if for any $x, y \in \mathfrak{L}$, there exists a δ-derivation $\varphi_{x,y} \in \mathrm{Der}_\delta(\mathfrak{L})$ such that

$$\nabla(x) = \varphi_{x,y}(x), \quad \nabla(y) = \varphi_{x,y}(y).$$

For a Lie algebra $\mathfrak{L}$, consider the following sequences:

$$\mathfrak{L}^1 = \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L}^{k+1} = [\mathfrak{L}^k, \mathfrak{L}], \quad k \geq 1,$$

$$\mathfrak{L}^{[1]} = \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L}^{[s+1]} = [\mathfrak{L}^{[s]}, \mathfrak{L}^{[s]}], \quad s \geq 1.$$

Definition 4. A Lie algebra $\mathfrak{L}$ is called nilpotent (respectively, solvable), if there exists $p \in \mathbb{N}$ ($q \in \mathbb{N}$) such that $\mathfrak{L}^p = 0$ (respectively, $\mathfrak{L}^{[q]} = 0$). The minimal number p (respectively, q) with such property is said to be the index of nilpotency (respectively, of solvability) of the algebra $\mathfrak{L}$.

All solvable Lie algebras with Heisenberg nilradical were found in [8]. In this subsection, we consider $(3n+2)$-dimensional solvable Lie algebra $\mathfrak{L}_{n,n+1}$ with the following multiplication table:

$$[e_{n+i}, e_i] = e_{2n+1}, \quad [e_i, x_i] = e_i, \quad [e_{n+i}, x_i] = -e_{n+i}, \quad 1 \leq i \leq n,$$
$$[e_i, x_{n+1}] = e_i, \quad [e_{2n+1}, x_{n+1}] = e_{2n+1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Note that nilradical of this algebra is the $(2n+1)$-dimensional Heisenberg algebra $\mathfrak{h}_n$ with a basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1}\}$.

Now we consider solvable Lie algebras with abelian nilradical and maximal complementary vector space (these algebras were found in [7]). It is known that the maximal dimension of complementary space for solvable Lie algebras with n-dimensional abelian nilpotent radical is equal to n. Moreover, up to isomorphism there exists only one such solvable Lie algebra with the following multiplications:

$$\mathfrak{L}_n : [e_i, x_i] = e_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

where $\{e_1, \ldots, e_n, x_1, \ldots, x_n\}$ is a basis of $\mathfrak{L}_n$.

In the following propositions, we give the description of anti-derivations of the algebras $\mathfrak{L}_{n,n+1}$ and $\mathfrak{L}_n$.

Proposition 1. Any anti-derivation D of the algebra $\mathfrak{L}_{n,n+1}$ has the following form:

$$D(e_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq 2n+1, \quad D(x_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad D(x_{n+1}) = \gamma e_{2n+1}.$$

Proposition 2. Any anti-derivation D of the algebra $\mathfrak{L}_n$, has the form

$$D(e_i) = \alpha_i e_i, \quad D(x_i) = \gamma_i e_i - 2\alpha_i x_i, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Now we give the main theorem concerning local and 2-local anti-derivations on maximal solvable Lie algebras whose nilradical are Heisenberg and abelian Lie algebras.

Theorem 1. Any local anti-derivation Δ of the algebra $\mathfrak{L}_{n,n+1}$ has the following form:

$$\Delta(e_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq 2n+1, \quad \Delta(x_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad \Delta(x_{n+1}) = \gamma e_{2n+1}.$$

Theorem 2. Any local anti-derivation Δ of the algebra $\mathfrak{L}_n$, has the form

$$\Delta(e_i) = \alpha_i e_i, \quad \Delta(x_i) = \gamma_i e_i - 2\beta_i x_i, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Corollary 1. Any local anti-derivation on the algebras $\mathfrak{L}_{n,n+1}$ is an anti-derivation.

Corollary 2. Solvable Lie algebra $\mathfrak{L}_n$, admit a local anti-derivation which is not an anti-derivation.

Theorem 3. Let $\mathfrak{L}_{n,n+1}$ and $\mathfrak{L}_n$ be solvable Lie algebras. Then any 2-local anti-derivation of $\mathfrak{L}_{n,n+1}$ and $\mathfrak{L}_n$ is an anti-derivation.

References

[1] V. Filippov. On δ-derivations of Lie algebras. *Siberian Mathematical Journal*, **39**: 6 (1998), 1218–1230.

[2] V. Filippov. δ-derivations of prime Lie algebras. *Siberian Mathematical Journal*, **40**: 1 (1999), 174–184.

[3] V. Filippov. On δ-derivations of prime alternative and Malcev algebras. *Algebra and Logic*, **39**: 5 (2000), 354–358.

[4] I. Herstein. Jordan derivations of prime rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **8** (1957), 1104–1110.

[5] R. Kadison. Local derivations. *Journal of Algebra*, **130** (1990), 494–509.

[6] A. Kh. Khudoyberdiyev, B. B. Yusupov. Local and 2-local $\frac{1}{2}$-derivation on finite-dimensional Lie algebras. *Results in Mathematics*, **79**: 5 (2024), 210.

[7] J. Ndogmo, P. Winternitz. Solvable Lie algebras with abelian nilradicals. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **27**: 2 (1994), 405–423.

[8] J. Rubin, P. Winternitz. Solvable Lie algebras with Heisenberg ideals. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **26**: 5 (1993), 1123–1138.

[9] D. Larson, A. Sourour. Local derivations and local automorphisms of $B(X)$. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **51** (1990), 187–194.

[10] P. Šemrl. Local automorphisms and derivations on $B(H)$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **125** (1997), 2677–2680.

[11] B. Yusupov, N. Vaisova and T. Madrakhimov, Local $\frac{1}{2}$-derivation on of n-dimensional naturally graded quasi-filiform Leibniz algebra of type I. *AIP Conference Proceedings*, 3147(1) (2024), 020008.

A large family of strongly regular graphs with small Weisfeiler-Leman dimension

Cai Jinzhuan
Hainan University, Haikou, China
caijzh12@163.com

In 2002, D. Fon-Der-Flaass constructed a prolific family of strongly regular graphs. In this paper, we prove that for infinitely many natural numbers n, this family contains $\exp(cn^2)$ strongly regular n-vertex graphs X with the same parameters, which satisfy the following condition: an isomorphism between X and any other graph can be verified by the 4-dimensional Weisfeiler–Leman algorithm.

The insight of dual second maximal subgroup sets into group structures

Ran Li
School of mathematics, Hohai University, Nanjing, Jiangsu, China
zhouwx2000@163.com

In this talk, we introduce the group class $\mathfrak{J}$, which consists of groups that every maximal subgroup is either p-solvable or has a prime power index. This group class extends the group class $\mathfrak{J}_{pr}$ defined by E. N. Demina and N. V. Maslova. Dual sets of second maximal subgroups are determined to explore these two group classes and several characterizations for non-solvable groups are presented.

Extended special linear $ESL_2(\mathbb{F}_p)$ group and roots formulas of matrix equations

Skuratovskii R.V.
TNU, Kiev, Ukraine
Tavrida National University, Kiev, Ukraine ORCID:0000-0002-5692-6123
ruslcomp@mail.ru, skuratovskii.ruslan@tnu.edu.ua

We generalize the group of unimodular matrices [1] and find its structure. For this goal we propose one extension of the special linear group.

Let $SL_2(\mathbb{F}_p)$ denotes the special linear group of degree 2 over a finite field of order p.

Definition 1. *The set of matrices*

$$\{M_i : Det(M_i) = \pm 1, M_i \in GL_2(\mathbb{F}_p)\}$$

forms ***extended special linear group*** *in $GL_2(\mathbb{F}_p)$ and is denoted by $ESL_2(\mathbb{F}_p)$.*

As it is studied by us $ESL_2(\mathbb{F}_p)$ has a structure of semidirect product $SL_2(\mathbb{F}_p) \rtimes \mathbb{C}_2$, where $\mathbb{C}_2 \simeq \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Theorem 1. *Let A be a simple matrix and $A \in SL_2(\mathbb{F})$ [2], then for A there is a solution $B \in SL_2(\mathbb{F})$ of the matrix equation*

$$X^2 = A \tag{1}$$

if and only if

$$trA + 2 \tag{2}$$

is quadratic element in $\mathbb{F}$ or 0, where $\mathbb{F}$ is a field.

If $X \in ESL_2(\mathbb{F})$ then the matrix equation (1) has a solutions iff

$$trA \pm 2 \tag{3}$$

is a quadratic element in $\mathbb{F}$ or 0. This solution $X \in ESL_2(\mathbb{F}) \setminus SL_2(\mathbb{F})$ iff $(trA - 2)$ is quadratic element or 0 in $\mathbb{F}$ but $(trA + 2)$ is not. Conversely $X \in SL_2(\mathbb{F})$ iff $(trA + 2)$ is quadratic element. Solutions belong to $ESL_2(\mathbb{F})$ and $SL_2(\mathbb{F})$ iff $(trA + 2)$ and $(trA - 2)$ are quadratic elements. In the case $A \in GL_2(\mathbb{F})$ this condition (2) takes form:

$$trA \pm 2\sqrt{detA} \tag{4}$$

is quadratic element in $\mathbb{F}$ or 0 and $detA$ is quadratic too.

Theorem 2. *If a matrix $A \in GL_2(\mathbb{F}_p)$ is semisimple [2] with different eigenvalues and at least one an eigenvalue $\lambda_i \in \mathbb{F}_{p^2} \setminus \mathbb{F}_p$, $i \in \{1, 2\}$, $p > 2$, then $\sqrt{A} \in GL_2(\mathbb{F}_p)$ iff of A satisfies:*

$$(\frac{\lambda_i}{p}) = 1 \text{ in the square extention that is } \mathbb{F}_{p^2}.$$

Matrices with a determinant -1 correspond to the elements changing Euclidean space orientation.

Corollary 1. Let A be simple matrix and $A \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ [2], then for matrix $A \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ there is a solution $B \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ of the matrix equation

$$X^2 = A \tag{5}$$

if and only if

$$\left(\frac{\operatorname{tr} A + 2}{p}\right) \in \{0, 1\}. \tag{6}$$

If $X \in ESL_2(\mathbb{F}_p)$ then the matrix equation (5) has a solution iff

$$\left(\frac{\operatorname{tr} A \pm 2}{p}\right) \in \{0, 1\}. \tag{7}$$

This solution $X \in ESL_2(\mathbb{F}_p) \setminus SL_2(\mathbb{F}_p)$ iff $\left(\frac{trA-2}{p}\right) = 1$ or 0, but $\left(\frac{\operatorname{tr} A+2}{p}\right) = -1$. Conversely $X \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ iff $\left(\frac{\operatorname{tr} A+2}{p}\right) = 1$. Solutions $X_i \in ESL_2(\mathbb{F})$ and $SL_2(\mathbb{F})$ iff $\left(\frac{\operatorname{tr} A+2}{p}\right) = 1$ and $(\operatorname{tr} A - 2) = 1$. In the case $A \in GL_2(\mathbb{F}_p)$ this condition (2) takes form:

$$\left(\frac{\operatorname{tr} A \pm 2\sqrt{detA}}{p}\right) \in \{0, 1\}. \tag{8}$$

Corollary 2. *If $A \in GL(F_2)$ the condition 2 takes the form:* $\left(\frac{\operatorname{tr} A}{p}\right) \in \{0, 1\}$.

If a simple matrix [3] $A \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ and $\left(\frac{\operatorname{tr}(A)+2}{p}\right) = 1$, then

$$\sqrt{A} = \frac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{tr} A \pm 2}} (A \pm E),$$

where E is identity element of $SL_2(\mathbb{F}_p)$, in case of sign '-' in $(A \pm E)$ roots $\sqrt{A} \in ESL_2(\mathbb{F}_p)$. Namely for $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in a coordinate form in case $\sqrt{A} \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ we have $\sqrt{A} = \frac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{tr}(A)+2}} \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$.

Corollary 2. *The formula of 4-th power root is the following*

$$\sqrt[4]{A} = \frac{A \pm E \pm \sqrt{\operatorname{tr} A \pm 2}}{\pm\sqrt{\pm\sqrt{\operatorname{tr} A \pm 2} \pm 2}}.$$

Proposition. If $B \in SL_2(\mathbb{F}_p)$ is root of equation $X^3 = A$, then

$$B = \frac{A + tr(\sqrt[3]{A})\sqrt[3]{\det(A)}}{\left(tr\sqrt[3]{A}\right)^2 - \sqrt[3]{\det(A)}},$$

where $A \in SL_2(\mathbb{F}_p)$.

Let us define sequences $s_n = \operatorname{tr} B\ s_{n-1} + t_{n-1}$ and $t_n = -\det B\ s_{n-1}$ with initial conditions $s_1 = 1, t_1 = 0$, $s_2 = trB$ and $t_2 = -detB$. Now we prove the following lemma.

Theorem *Let $n \geqslant 3$ and $A \in M_2(\mathbb{F}_p)$. If $A \neq c \cdot I$ for any $c \in \mathbb{F}_p$ and $R = \{B \in M_2(\mathbb{F}_p) \mid B^n = A\}$ set of it's n-th roots [4], then next inclusion follows:*

$$R \subset \left\{ B \in M_2(\mathbb{F}_p) \,\middle|\, B = \frac{A + b\ Q_{n-2}(a,b) \cdot I}{Q_{n-1}(a,b)}\ ,\ b^n = \det A,\ P_n(a,b) = \operatorname{tr} A \right\}.$$

Sequences s_n, t_n satisfy recurrent equation with characteristic polynomial $c(x)$ which is also characteristic polynomial for matrix B.

References

[1] A. Kulshrestha, A. Singh. Computing n-th roots in SL_2 and Fibonacci polynomials. *Proceedings - Mathematical Sciences*, **130** (2020), Article: 31.

[2] A. A. Klyachko, D. V. Baranov. Economical adjunction of square roots to groups. *Sib. math. journal.*, **53**: 2 (2012), 250–257.

[3] R. Skuratovski. Extended Special Linear group $ESL_2(\mathbb{F})$ and matrix equations in $SL_2(\mathbb{F})$, $SL_2(\mathbb{Z})$ and $GL_2(\mathbb{F}_p)$. *WSEAS Transactions on Mathematics.* **23** (2024), 643–659.

[4] R. V. Skuratovskii. Extended Special Linear group $ESL_2(\mathbb{F})$ and matrix equations in $SL_2(\mathbb{F})$, $SL_2(\mathbb{Z})$ and $GL_2(\mathbb{F}_p)$. https://arxiv.org/pdf/2307.13873.

Normal subgroups of iterated wreath product of symmetric and alternating groups

Skuratovskii R.V.
TNU, Kiev, Ukraine
Tavrida National University, Kiev, Ukraine ORCID:0000-0002-5692-6123
ruslcomp@mail.ru, skuratovskii.ruslan@tnu.edu.ua

Normal subgroups and their properties for finite and infinite iterated wreath products $W_m = S_{n_1} \wr \ldots \wr S_{n_m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, where group acting from the left, are found.

We prove that W is a monolithic group.

Definition 1. *The permutational* subwreath product $G \wr H$ *is the semi-direct product* $G \ltimes \tilde{H}^X$, *where* G *acts on the subdirect product* $\tilde{H}^X$ *by the respective permutations of the subdirect factors. Provided the specification of* $\tilde{H}^X$ *is established separately.*

Subwreath product also appears in the research of pronormality [1]. The first normal subgroup in $W = S_n \wr S_n$ turned out to be subwreath product.

Definition 2. *The set of elements from* $S_n \wr S_n, n \geqslant 3$ *which presented by the Kaloujnine tableaux of form:* $[e]_0,\ [a_1, a_2, \ldots, a_n]_1$, *satisfying the following condition*

$$\sum_{i=1}^{n} dec([a_i]_1) = 2k, k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

forms subgroup $E \wr \widetilde{A}_n$ *and be called set of type* $\widetilde{A}_n^{(1)}$. *Note that condition* (9) *uniquely identifies subdirect product, wherein* $dec(\pi)$ *is the decrement [3].*

Theorem 1. *The set* $E \wr \widetilde{A}_n$ *forms normal subgroup having* ***normal rank*** $n-1$ *[4] in* $S_n \wr S_n$.

Definition 3. *The subgroup* $E \wr E \wr \widetilde{A}_n^{(1)}$ *be denoted by* $\widetilde{A}_n^{(2)}$.

Furthermore we will prove that $E \wr \widetilde{A}_n^{(2)} \lhd S_n \wr S_n \wr S_n$. The order of $E \wr \widetilde{A}_n^{(2)}$ is $(n!)^{3n} : 2^3$.

Definition 4. The set of elements from $S_n \wr S_n \wr S_n, n \geqslant 3$ presented by the tables [2] form: $[e]_0,\ [e, e, \ldots, e]_1, [a_1, a_2, \ldots, a_n]_2$, satisfying the following condition

$$\sum_{i=1}^{n^2} dec([a_i]_2) = 2k, k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

forms subgroup $E \wr E \wr \widetilde{A}_{n^2}$ and also be called set by type $\widetilde{A}_{n^2}^{(2)}$.

Theorem 2. The following series is normal: $E \lhd \widetilde{A}_n^{(2)} \lhd \widetilde{A}_{n^2}^{(2)} \lhd S_n \wr S_n \wr S_n$.

Recall that the monolith is the unique minimal normal subgroup.

Theorem 3. *The subgroup* $E \wr \widetilde{A}_n$ *is the monolith in* $S_n \wr S_n$.

Theorem 4. *The subgroup* $E \wr E \wr \widetilde{A}_n^{(1)}$ *is the monolith in* $S_n \wr S_n \wr S_n$.

Theorem 5. *If* $G = S_n \wr S_m$ *then the subgroup* $\widetilde{T}_{n,m}$ *having structure*

$$T_{n,m} \simeq (\underbrace{A_m \times A_m \times \cdots \times A_m}_{n}) \rtimes C_2$$

is normal. The homomorphism from C_2 *in* $Aut(\prod_{i=1}^{n} A_m^{(i)})$ *constructed by the following law, the parity of each permutation in a tuple* $(g_1, g_2, \cdots, g_n)$, *where* $g_i \in A_m$ *is the same and switches by the action of the element* $\delta \in C_2$ *on the tuple as an element* $(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ *from element* $((g_1, g_2, \cdots, g_n), \delta)$ *of* $\prod_{i=1}^{n} A_m^{(i)} \rtimes C_2$.

Definition 7. *A subgroup in* $S_n \wr S_n$ *is called* $\widetilde{T_n}$ *if it consists of:*

1. *elements of* $E \wr A_n$,

2. *elements with the tableau [2] presentation* $[e]_1,\ [\pi_1,\dots,\pi_n]_2$, *that* $\pi_i \in S_n \setminus A_n$.

structure

$$\tilde{T_n} \simeq (\underbrace{A_n \times A_n \times \cdots \times A_n}_{n}) \rtimes C_2 \simeq \underbrace{S_n \boxplus S_n \dots \boxplus S_n}_{n},$$

where the operation $\boxplus$ *of a subdirect product is subject of item 1) and 2).*

Let $\underset{i=1}{\overset{k}{\wr}} S_{n_i}$ be denoted by W_k.

Definition 5. *The set of elements from* $\underset{i=1}{\overset{k}{\wr}} S_{n_i}, n_i \geqslant 3$ *with depth* k *satisfying the following condition*

$$\sum_{i=1}^{n^k} dec([a_i]_k) = 2t, t \in \mathbb{N},\ \ [a_i]_j = e, \text{ whenever } j = \overline{0, k-1} \tag{11}$$

forms the subgroup $E \wr \dots \wr E \wr \widetilde{A}_{n_k^k}$ *and additionally be called* $\widetilde{A}^{(k)}_{n^k}$.

Definition 6. *The set of elements from* $\underset{i=1}{\overset{k}{\wr}} S_{n_i}, n_i \geqslant 3$ *with depth* k *satisfying the following condition*

$$\sum_{i=(s-1)n^m+1}^{sn^m} dec([a_i]_k) = 2t, t \in \mathbb{N},\ 1 \leq s \leq n\ \ [a_i]_j = e, \text{ whenever } j = \overline{0, k-1} \tag{12}$$

forms the subgroup $E \wr \dots \wr E \wr \widetilde{A}_{n_k^m}$ *and additionally be called* $\widetilde{A}^{(k)}_{n^m}$, *where* $m < k$.

In particular for the case $i = 1$, $H_1 \simeq \tilde{A}^{(k)}_n$ and determined by the following congruences

$$\sum_{i=1}^{n} dec\,(\pi_{ki}) \equiv \sum_{i=n+1}^{2n} dec\,(\pi_{ki}) \equiv \dots \equiv \sum_{i=ln+1}^{(l+1)n} dec\,(\pi_{ki}) \equiv \dots \equiv \sum_{n^k-n+1}^{n^k} (\pi_{ki}) \equiv 0\,(mod 2).$$

Note that there are n^{k-1} such sums.

For the case $i = m$, $H_m \simeq \tilde{A}^{(k)}_{n^m}$, $m < k$ and determined by the following congruences

$$\sum_{i=1}^{n^m} dec\,(\pi_{ki}) \equiv \sum_{i=n^m+1}^{2n^m} dec\,(\pi_{ki}) \equiv \dots \equiv \sum_{i=ln^m+1}^{(l+1)n^m} dec\,(\pi_{ki}) \equiv \dots \equiv \sum_{n^k-n^m+1}^{n^k} (\pi_{ki}) \equiv 0\,(mod 2).$$

Theorem 7. *The following normal series holds among the subgroups of the* k*-th level [7–9]:*

$$E \lhd \tilde{A}^{(k)}_n \lhd \tilde{A}^{(k)}_{n^2} \lhd \tilde{A}^{(k)}_{n^3} \lhd \dots \tilde{A}^{(k)}_{n^k} \lhd W_k.$$

The quotient group for this series is $1 < j < k$,

$$\tilde{A}^{(k)}_{n^j} \Big/ \tilde{A}^{(k)}_{n^{j-1}} \simeq \prod_{i=1}^{n-1} C_2.$$

Definition 8. *The set of elements from* $\underset{i=1}{\overset{f}{\wr}} S_{n_i},\ \ n_i \geqslant 3$ *with depth* k

satisfying the following condition

$$\sum_{i=1}^{n^j} dec([a_i]_j) = 2t, t \in \mathbb{N},\ k \leq j \leq f,\ \ [a_i]_j = e, \text{ whenever } j = \overline{0, k-1} \tag{13}$$

be called $\widetilde{A}_{n^j}^{(k,f)}$, *where* $k < f$.

Theorem 8. *The normal series among subgroups of the level having the form*

$$\tilde{A}_{n^k}^{(k,f)} \rhd \tilde{A}_{n}^{(k+1,f)} \rhd \tilde{A}_{n^2}^{(k+2,f)} \rhd \tilde{A}_{n^3}^{(k+3,f)} \rhd \ldots \rhd \tilde{A}_{n^{f-k}}^{(f,f)},$$

$f \leq k$ *by levels subgroups holds.*

Let $W_\infty = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\wr}} S_{n_i},\ n_i \geqslant 3$. Consider normal subgroup of form $S_{n_1} \wr S_{n_2} \wr S_{n_3} \ldots \wr S_{n_{k-1}} \wr \widetilde{A}_{n^k} \wr S_{n_{k+1}} \wr S_{n_{k+2}} \wr \ldots$ as open set $O_{n^k}^{(k)}$ and its subgroups of form $\widetilde{A}_{n^m}^{(k)}$, $m < k$ on k-th level. Since $\widetilde{A}_{n^k}^{(k)}$ contains $\widetilde{A}_{n^m}^{(k)}$, where $m < k$ then the continuity of multiplication is obvious. Also $\tilde{T_n}$ and its generalization on k-th level subgroup [5, 7] spreading this subgroup to $\tilde{T}_{n^k}$ be open sets.

Thus, this base of open sets endows W_∞ with the structure of a topological group.

Proposition. If $n \equiv 0(mod 2)$ then normal subgroups of type $O_{n^k}^{(k)}$ form saturation set [10] of W_∞.

Theorem 9. *Proper normal subgroups in* $W = S_n \wr S_m$, $n, m \geqslant 3$, $n, m \neq 4$ *are the following 2 types:*

1. subgroups of first level stabilizer $(St_{S_n \wr S_m}(1))$, *which are the following:* $e \wr A_m$, $E \wr \widetilde{A}_n$, $\widetilde{T_m}$, $e \wr S_m$;

2. subgroups, acting on both levels, which are the following: $S_n \wr \widetilde{A}_n$, $A_n \wr \widetilde{A_m}$, $A_n \wr S_m$ *and the first subgroup* $S_n \wr \widetilde{A_m}$ *has 2 isomorphic copies, and determined by the same semidirect product* $(((A_n \times A_n \times A_n) \rtimes (C_2 \times C_2)) \rtimes A_n) \rtimes C_2$ *which was denoted by* H_2.

Thus, total number of proper normal subgroups in $S_n \wr S_m$, $n, m \geqslant 3, n, m \neq 4$ *is 8.*

Proposition 1. *Any two normal subgroups* $N_i, N_j \lhd W$ *are mutually commutative*

$$N_i N_j = N_j N_i.$$

The lattices of normal and quasinormal subgroups of $S_n \wr S_k$ are found.

Theorem 10. *The full list of normal subgroups of* $S_n \wr S_n \wr S_n$ *consists of 50 normal subgroups. These subgroups are the following:*

1 ***Type*** T_{023} *contains:* $E \wr \tilde{A}_n \wr H$, $\widetilde{T_n} \wr H$, *where* $H \in \{\tilde{A}_n, \tilde{A}_{n^2}, S_n\}$. *There are 6 subgroups.*

2 ***The second type of subgroups is subclass in*** T_{023} *with new base of wreath product subgroup* $\tilde{A}_{n^2}$: $E \wr S_n \wr \tilde{A}_{n^2}$, $E \wr N_i(S_n \wr S_n)$. *Therefore this class has 12 new subgroups. Thus, the total number of normal subgroups in* ***Type*** T_{023} *is 18.*

3 ***Type*** T_{003}: $A_{00(n^2)}^{(3)} = E \wr E \wr \tilde{A}_{n^2}$, $\widetilde{T_{n^2}}$, $\widetilde{T_n}^{(3)}$. *Hence, here are 3 new subgroups.*

4 ***Type*** T_{123}: $N_i(S_n \wr S_n) \wr S_n$, $N_i(S_n \wr S_n) \wr \tilde{A}_n$ *and* $N_i(S_n \wr S_n) \wr \tilde{A}_{n^2}$. *Thus, there are 29 new normal subgroups in* T_{123}, *taking into account repetition.*

Let $Aut_f X^*$ be group of finite automorphisms.

Theorem 11. Let $H \lhd Aut_f X^*$ with depth k then H contains k-th level subgroup P having all even vertex permutations $p_{ki} \in A_n$ on X^k and trivial permutations in vertices of rest of levels. Furthermore P is normal in $Aut_f X^*$ provided k is last active level of $Aut_f X^*$.

References

[1] N. V. Maslova, D. O. Revin. On the pronormality of subgroups of odd index in some direct products of finite groups. *Journal of Algebra and Its Applications*, **22**: 4 (2023), 2350083.

[2] L. A. Kaloujnine. Sur les p-group de Sylow. *C. R. Acad. Sci. Paris.*, **221** (1945), 222–224.

[3] V. N. Sachkov. Combinatorial methods in discrete Mathematics. *Encyclopedia of mathematics and its applications 55*. Cambridge: Cambridge Press, 2008. 305.

[4] O. Yu. Dashkova. On groups of finite normal rank. *Algebra Discrete Math.*, **1**: 1 (2002), 64–68.

[5] R. V. Skuratovskii. On commutator subgroups of Sylow 2-subgroups of the alternating group, and the commutator width in wreath products. *European Journal of Mathematics*, **7**: 1 (2021), 353-373.

[6] Y. A. Drozd, R. V. Skuratovskii. Generators and relations for wreath products of groups. *Ukr. Math. J.*, **60** (2008), 1168–1171.

[7] R. V. Skuratovskii. Commutator subgroup of sylow 2-subgroups of alternating group and the commutator width in the wreath product. *Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica*, **92**: 1 (2020), 3–16.

[8] R. V. Skuratovskii. Normal subgroups of iterated wreath products of symmetric alternating groups. *Modern problems in mathematics and its applications International (53rd National) Youth School-Conference.* Yekaterinburg, 2022, 37–38.

[9] R. V. Skuratovskii. Normal subgroups of iterated wreath products of symmetric groups and alternating with symmetric groups. https://arxiv.org/pdf/2108.03752.pdf.

[10] A. K. Shlepkin. About some periodic groups saturated with finite simple groups. *Siberian advanced in mathematics*, **1**: 1 (1998), 129–138. (in Russian)

On the Weisfeiler-Leman dimension of circulant graphs

Yulai Wu
Hainan University, Haikou, China

Interest in the Weisfeiler–Leman dimension has increased in recent years, particularly because if this dimension of a graph X is bounded by a constant m, certain algorithmic problems become tractable. In this work, we focus on circulant graphs. The Weisfeiler–Leman dimension of a circulant graph X with respect to the class of all circulant graphs is defined as the smallest positive integer m such that the m-dimensional Weisfeiler–Leman algorithm correctly tests isomorphism between X and any other circulant graph. We prove an upper bound for the relative WL-dimension of a circulant graph of order n: this dimension is less than or equal to $\Omega(n) + 3$, where $\Omega(n)$ is the total number of prime divisors of n (counted with multiplicities).

The influence of second maximal subgroups with at least two prime factors on group structure

Wenxia Zhou
School of mathematics, Hohai University, Nanjing, Jiangsu, China
zhouwx2000@163.com

In group theory, prime factors are fundamentally important in revealing the classification and structure of groups. Notable results include Burnside's theorem, Feit–Thompson theorem, etc. In this talk, we attempt to explore new methods for examining non-solvable groups through the quantitative properties of second maximal subgroups. We focus on the set of second maximal subgroups with at least two prime factors, and study their impact on the structure of finite groups.

Математическое программирование, некорректные задачи и анализ данных (председатель член–корреспондент РАН М.Ю. Хачай)

Использование статистических методов для калибровки параметров геофизической модели

Розенберг Л.В.
Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург, Россия
ozsh.rozenberg@mail.ru

Актуальность задачи моделирования сейсмичности литосферы обусловлена затруднениями статистического анализа существующих каталогов землетрясений ввиду короткой истории надежных инструментальных наблюдений. Предвестники сильных событий, обнаруженные в реальных каталогах, могут быть единичными и не повторяться в будущем. Синтетические же каталоги, полученные путем численного моделирования, покрывают сколь угодно длительные интервалы времени, что позволяет изучать значимость определенных характеристик сейсмического потока, полезных для мониторинга сейсмического риска. Такие каталоги (с детальной информацией о каждом модельном землетрясении) являются основным результатом работы сферической модификации блоковой модели динамики и сейсмичности литосферы, разработанной в ИММ УрО РАН им. Н.Н. Красовского [1].

Подход к моделированию опирается на представление тектонических плит в виде системы абсолютно жестких блоков на сфере, взаимодействующих между собой вдоль разграничивающих их разломов. Современная версия модели, с возможностью использования в расчетах реальных геофизических и сейсмических данных, реализована в виде пакета программ, ориентированного на многопроцессорную технику в вычислительных процедурах и на персональную в сервисных. Процесс калибровки модели существенно затруднен большим количеством варьируемых параметров, отсутствием явных аналитических зависимостей между входными и выходными характеристиками и необходимостью экспертного участия. Полный перебор всех вариантов значений параметров (например, на некоторой сетке) невозможен ввиду как огромного количества вариантов, так и значительного времени счета в каждом из них. Поэтому задача оптимизации этой процедуры, безусловно, является актуальной.

В данной работе предлагается использовать статистические методы анализа результатов моделирования с целью получения оптимальных значений входных модельных параметров. Для этого выбирается некоторая выходная числовая характеристика результата моделирования, которая адекватно описывает сейсмические свойства рассматриваемого региона и для которой известны реальные значения за длительный промежуток времени. В качестве такого показателя подойдёт, например, суммарная магнитуда всех землетрясений в регионе за определенное время. Будем считать удачными те наборы параметров, при которых значение показателя, вычисленное по синтетическому каталогу, близко к реальному. Цель работы — наметить направления совокупных изменений входных параметров, ведущие к улучшению выбранного показателя качества моделирования.

Ввиду отсутствия точной функциональной зависимости между входными параметрами и выходной характеристикой, предлагается аппроксимировать эту связь при помощи линейной регрессии, используя входные параметры в качестве независимых признаков, а выходной показатель — в качестве зависимого [2]. С целью сокращения количества наблюдений, необходимых для построения достаточно точной регрессии, в начальной серии экспериментов результаты моделирования рассматриваются только для одного сейсмического региона. Коэффициенты регрессии находятся методом наименьших квадратов через минимизацию функции

$$L(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) = \sum_{j=1}^{N} (y_j - \hat{y}_j)^2 = \sum_{j=1}^{N} (y_j - (\beta_0 + \beta_1 x_{1,j} + \ldots + \beta_n x_{n,j}))^2,$$

где n — количество независимых признаков, N — число наблюдений, $x_{i,j}$ — значение i-го признака в j-м наблюдении, y_j — реальное значение выходного показателя, $\hat{y}_j$ — предсказанное значение выходного показателя.

После нахождения коэффициентов зафиксируем некоторые начальное приближение входных параметров и точность аппроксимации выходного показателя. Сдвигая значения параметров вдоль вектора нормали к соответствующей гиперплоскости, корректируем выходной показатель, добиваясь заданной точности. Значимость полученного уравнения проверяется с помощью критерия Фишера. Качество уравнения оценивается коэффициентом детерминации:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{res}}{\sum_{tot}},$$

где $\sum_{res} = \sum_{j=1}^{N} (y_j - \hat{y}_j)^2$, $\sum_{tot} = \sum_{j=1}^{N} (y_j - \bar{y})^2$, $\bar{y}$ — среднее значение зависимого признака.

После построения значимой линейной регрессии, соображения, изложенные выше, экспериментально подтвердились. Совокупное изменение входных параметров от начальных значений в направлении нормали к регрессионной гиперплоскости (ему соответствуют нетривиальные зависимости этих параметров) действительно приводит к увеличению выходного показателя и наоборот. Отметим, что расчеты выполнялись в ИММ УрО РАН на гибридном вычислителе кластерного типа “Уран”, который имеет пиковую производительность порядка 250 Тфлопс. Следующим этапом работы предполагается реализация численного метода получения близкого к реальному значения выходного показателя, т.е. метода нахождения оптимального значения коэффициента λ, на который будет умножаться вектор на каждой итерации. При выборе λ необходимо найти баланс между точностью аппроксимации входных параметров и скоростью работы метода.

Список литературы

[1] Л. А. Мельникова, В. Л. Розенберг. Стохастическая модификация сферической блоковой модели динамики и сейсмичности литосферы. *Вычислительные методы и программирование*, **16** (2015), 112–122.

[2] В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.

Ламинаризация перекрещивающихся множеств и ее игровая постановка

Рыженко К.В.
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург Россия
kseniarizhenko@gmail.com

Пусть V произвольное непустое конечное множество. Множества $X, Y \in 2^V$ называются перекрещивающимися (неламинарными) и обозначаются $X \nparallel Y$, если ни одно из множеств $X\backslash Y$, $Y\backslash X$, $X \cap Y$, $V\backslash(X \cup Y)$ не пусто. В противном случае они ламинарны, что обозначается $X \parallel Y$. Семейство подмножеств $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ называется ламинарным, если оно не содержит перекрещивающихся пар.

В некоторых задачах дискретной оптимизации требуется преобразование произвольного семейства подмножеств конечного множества V в ламинарное.

Преимущество использования ламинарных семейств в алгоритмах аппроксимации основано на том, что мощность ламинарного семейства $\mathcal{L}$ подмножеств конечного множества V линейно зависит от числа вершин последнего $|\mathcal{L}| = O(|V|)$, а само преобразование произвольного семейства $\mathcal{F}$ к эквивалентному ламинарному $\mathcal{L}$ производится за конечное число шагов, полиномиально зависящее от $|V|$ и $|\mathcal{F}|$.

Для определения верхней границы алгоритмической сложности ламинаризации удобно использовать игровую постановку, основанную на подходе Карзанова А.В., в которой первый игрок совершает шаги, ведущие к скорейшему получению ламинарного семейства, а второй игрок предпринимает все возможное для затруднения этого процесса. В ходе игры первый игрок заменяет пару неламинарных множеств $X, Y \in \mathcal{F}$ на пару множеств $\{X \cap Y, X \cup Y\}$ или $\{X\backslash Y, Y\backslash X\}$, из которых хотя бы одна принадлежит особому замкнутому относительно пересечения семейству $\mathcal{I} \subseteq 2^V$ и доступна для его выбора; второй игрок возвращает в семейство $\mathcal{F}$ одно из множеств X или Y.

Игра гарантированно заканчивается выигрышем первого игрока.

Игра по ламинаризации семейства $\mathcal{F}$ сводится к последовательности *циклических игр* - игр на циклических семействах $\mathcal{R}$ особого вида, содержащих подмножества из конечного множества W, и сохраняющих следующие существенные свойства:

(i) инвариантность относительно циклического сдвига и дополнения;

(ii) разбиение семейства $\mathcal{R}$ на два ламинарных подсемейства $\mathcal{R} = \mathcal{L}_1 \dot\cup \mathcal{L}_2$, содержащих целочисленные интервалы $\overline{1, i} \in \mathcal{L}_1$, $2 \leqslant i \leqslant r-2$, и $\overline{2, j} \in \mathcal{L}_2$, где $i+1 \leqslant j \leqslant r-1$; (в [7] мы рассматриваем два вида игр: $CG(r)$ и $CG(r, q)$ с $2 \leqslant i \leqslant q$ и $q+1 \leqslant j \leqslant r-1$);

(iii) каждая пара соседних элементов $i, i+1$ (по модулю r) в W разделена каким-либо множеством $S \in \mathcal{R} \subset 2^W$, так что $|\{i, i+1\} \cap S| = 1$; если на каком-то шаге игры пара $i, i+1 \in W$ перестает разделяться каким-либо множеством, она заменяется одним элементом i с последующим уменьшением $|W|$ и сдвигом.

Недавно нам удалось улучшить последнюю известную нам оценку сложности ламинаризации $O(n^4 m)$, данную Карзановым А.В. в [2].

Теорема. *В многошаговой антагонистической игре двух лиц по ламинаризации произвольного семейства $\mathcal{F}$ подмножеств конечного множества V у первого игрока существует выигрышная стратегия, гарантирующая его победу за $O(\max\{nm, n^2\})$ шагов, где $n = |V|$ и $m = |\mathcal{F}|$.*

Улучшение оценки связано с использованием более эффективной стратегии в циклической игре.

Список литературы

[1] F. Cecchetto, V. Traub, R. Zenklusen. Better-than-$\frac{4}{3}$-approximations for leaf-to-leaf tree and connectivity augmentation. *Math. Program.*, **207** (2023), 515-549.

[2] A. V. Karzanov. How to tidy up a symmetric set-system by use of uncrossing operations. *Theor. Comput. Sci.*, **157**: 2 (1996), 215–225.

[3] M. Yu. Khachay, E. D. Neznakhina, K. V. Ryzhenko. Constant-factor approximation algorithms for a series of combinatorial routing problems based on the reduction to the asymmetric traveling salesman problem. *Proc. Steklov Inst. Math.*, **319**: 1 (2022), 140–155.

[4] G. Kortsarz, Z. Nutov. LP-relaxations for tree augmentation. *Discr. Appl. Math.*, **239** (2018), 94–105.

[5] Y. Maduel, Z. Nutov. Covering a laminar family by leaf to leaf links. *Discr. Appl. Math.* **158**: 13 (2010), 1424–1432.

[6] E. D. Neznakhina, Yu. Yu. Ogorodnikov, K. V. Rizhenko, M. Yu. Khachay. Approximation algorithms with constant factors for a series of asymmetric routing problems. *Dokl. Math.*, **108**: 3 (2023), 499–505.

[7] K. Rizhenko. Improved first player strategy for the zero-sum sequential uncrossing game. *Ural math. journal*, **10**: 1 (2024) 1–4.

[8] K. Rizhenko, K. Neznakhina, M. Khachay. Fixed ratio polynomial time approximation algorithm for the prize-collecting asymmentric traveling salesman problem. *Ural Math. J.*, **9**: 1 (2023), 135–146.

[9] A. Schrijver. *Combinatorial Optimization - Polyhedra and Efficiency.* Springer, 2003.

[10] O. Svensson, J. Tarnawski, L. Végh. A constant-factor approximation algorithm for the asymmetric traveling salesman problem. *J. ACM.*, **67**: 6 (2020), Art. No. 37.

[11] V. Traub, J. Vygen. An improved approximation algorithm for the asymmetric traveling salesman problem. *SIAM J. on Comput.*, **51**: 1 (2022), 139–173.

Метод TOPSIS с интервальными весами

Симаков П.К.
ЮУрГУ (НИУ), Челябинск, Россия
pavelsimakov35707@gmail.com

Моделирование сложных систем часто включает в себя многокритериальное принятие решений (MCDM), концепция которого была впервые исследована Вильфредо Парето в начале XX века.

В задачах, предполагающих наличие N критериев, основная цель заключается в выборе альтернативы, оптимизирующей несколько критериев одновременно. Решения обычно представляют собой векторные максимумы, при этом наиболее известным является максимум Парето. Однако следует отметить, что множество Парето-оптимальных альтернатив, как и множество любых других векторных максимумов доминируют, то есть, как правило нельзя выбрать одну из альтернативу, превосходящую все другие по каждому из критериев это осложняет процесс выбора, поскольку каждая альтернатива Парето-оптимальна.

Методы, такие как TOPSIS [1], COPRAS [2] и EDAS [3] и другие, эффективно решают данную проблему, однако они требуют определения весов для критериев, что является задачей с высоким уровнем субъективности и возможными ошибками. Введение интервальных весов, которые предлагают диапазоны вместо строгих значений, значительно упрощает процесс и снижает вероятность ошибок.

В докладе предлагается модификация метода TOPSIS, которая включает использование нечетких решений для описания неопределенности. Предложенный подход иллюстрируется на примере выбора парового котла.

Предложенная модификация метода TOPSIS для задач многокритериального принятия решений с интервальными весами имеет потенциал для распространения на другие конструктивные методы выбора оптимальных альтернатив в этой области.

При использовании метода TOPSIS предполагается, что лицо, принимающее решение, не устанавливает точные значения для весов, а только задает интервалы, в рамках которых эти веса могут варьироваться. Каждому весу предоставляется возможность принимать любое значение в пределах указанных границ

$$[\alpha_j, \beta_j], \quad (j = 1, ..., m), \quad \text{где } 0 < \alpha_j < w_j < \beta_j.$$

Эта формулировка вносит интервальную неопределенность в систему весов, следуя методологии, предложенной в [4].

Такие неопределенности представляются с помощью набора, обозначаемого следующим образом:

$$W = W_1 \times W_2 \times ... \times W_m \subset \mathbb{R}^m,$$

$$\text{где } W_j = [\alpha_j; \beta_j] \quad (j = 1, ..., m).$$

Список литературы

[1] Z. Pavić, V. Novoselac. Notes on TOPSIS Method. *International Journal of Research in Engineering and Science.*, **1**: 2 (2013), 5–12.

[2] A. Alinezhad, J. Khalili. COPRAS Method. *New Methods and Applications in Multiple Attribute Decision Making (MADM).*, 2019, 87–91.

[3] M. Keshavarz Ghorabaee, M. Amiri, E. K. Zavadskas, Z. Turskis, J. Antucheviciene. Stochastic EDAS method for multi-criteria decision-making with normally distributed data. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **33**: 3 (2017), 1627–1638.

[4] В. И. Жуковский, К. Н. Кудрявцев. Уравновешивание конфликтов и приложения. М.: URSS, ЛЕНАНД, 2012. 303.

Enhanced embedding learning with regularization

Firstkov A.L.
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia
firstk121@gmail.com

Agaponov F.S.
Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russia
philip.agaponov@gmail.com

The development of high quality embeddings is critical for problems in many fields such as bioinformatics. Embedding methods from natural language processing (NLP) tasks have been successfully applied to biological sequences. However, NLP methods learned on amino acid or nucleotide sequences do not have access to their physicochemical properties during training. To bridge this gap, we propose an embedding regularization technique that integrates physicochemical properties into the learning process. We called this method a Biostabiliser.

Biostabiliser penalize deviations between distances in embedding space and physicochemical properties distances. In our experiments we consider well-known framework Word2Vec [1]. Physicochemical properties of amino acids were obtained from the AAindex database [2]. We employ two distinct loss functions for regularization:

1. *Target-Context Loss:* This loss function regularizes embeddings by aligning distances in the embedding space with those in the physicochemical space for target-context pairs. It can be represented as:

$$L_{\text{target-context}}(W, x, y) = |\rho(W_x, W_y) - \rho(P_x, P_y)|$$

where W_x and W_y are the embedding vectors of the n-grams x and y, respectively, P_x and P_y are the corresponding physicochemical properties vectors of these n-grams, and ρ is distance metric.

2. *KNN Loss:* This loss introduces a local perspective by focusing on the k-nearest neighbors in the physicochemical space. Rare n-grams are emphasized, simulating a denoising effect in sparse datasets. The KNN loss can be expressed as:

$$L_{\text{knn}}(W, \mathcal{R}) = \frac{1}{|\mathcal{R}|} \sum_{i \in \mathcal{R}} \mathbb{E}_{j \sim g(j|i)} \left[\|W_i - W_j\|_2 \right]$$

where: $\mathcal{R}$ is the set of indices of the rarest n-grams in the training data, j is randomly selected index from k-nearest neighbors of n-gram i in the physicochemical space, $g(j|i)$ is a probability distribution over the k-nearest neighbors, defined as:

$$g(j|i) = \frac{\rho(P_i - P_j)}{\sum_{j' \in K} \rho(P_i - P_{j'})}$$

where K is set of k-nearest neighbor to i.

References

[1] T. Mikolov, K. Chen, G. Corrado, J. Dean. Efficient Estimation of Word Representations in Vector Space. *In Proceedings of Workshop at ICLR.* — 2013a.

[2] S. Kawashima, H. Ogata, M. Kanehisa. Aaindex: amino acid index database. *Nucleic acids research*, **27**: 1 (1999), 368–369.

Graph-based embedding in antigenic modelling

Firstkov A.L.
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia
firstk121@gmail.com

Embedding experimental data is a common first step in many tasks of machine learning. The choice of appropriate embedding algorithm and its parameters is crucial to success of the subsequent analysis. Recently [1] we used embedding techniques originated from Natural Language Processing (NLP) with reduced amino acid alphabets (RAAA) in antigenic modelling of influenza. Influenza-related respiratory disease cause from 291 to 645 thousand deaths annually [2]. Vaccination is currently one of the most effective way to control the flu. Modeling antigenic similarity is critical for the selection of vaccine components.

A database of antigenic assays can be represented as a graph in which nodes are strain sequences and edges are a measure of antigenic similarity, allowing for graph-based embedding methods. This methods can be effective in converting graphs into low-dimensional continuous vector spaces, preserving its structure properties. Peng et al. [3] show that graph-based models can achive high results in antigenic modelling of influenza A/H3N2 subtype. The best results in their experiments was shown by accelerated attributed network embedding [4]. This and some other models relay on techniques from NLP to represent the attributes of nodes. The efficiency of such graph-based models can be improved by fine tune embedding from NLP and RAAA encoding.

References

[1] M. Forghani, M. U. Khachay, A. L. Firstkov, E. Ramsay. An Artificial Neural Network Based Ensemble Model for Predicting Antigenic Variants: Application of Reduced Amino Acid Alphabets and Word2Vec. *8th Iranian Conference on Signal Processing and Intelligent Systems*. IEEE, 2022, 1–6.

[2] Iuliano A. D. et al. Estimates of global seasonal influenza-associated respiratory mortality: a modelling study. *The Lancet*, **391**: 101127 (2018), 1285–1300.

[3] F. Peng, Y. Xia, W. Li. Prediction of Antigenic Distance in Influenza A Using Attribute Network Embedding. *Viruses*. **15**: 7 (2023), 1478.

[4] X. Huang, J. Li, X. Hu. Accelerated attributed network embedding.*Proceedings of the 2017 SIAM international conference on data mining. – Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2017, 33–641.

Approximation algorithms for a two depot, heteurogeneous traveling salesman problem

Yongyu Chen
Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia
chen@urfu.ru

A generalization of the multiple Traveling Salesman Problem (TSP) is examined, which incorporates heterogeneous vehicles. In this context, the travel cost between any two locations is contingent upon the specific type of vehicle utilized. The problem is defined by a set of targets, an initial location (depot), and the metric travel costs associated with each vehicle. The primary objective is to devise a tour for each vehicle that ensures every target is visited precisely once by one vehicle, while simultaneously minimizing the total travel costs incurred by all vehicles. This issue is known as the Multiple Depot Heterogeneous Traveling Salesman Problem (MDHTSP) and has garnered significant attention within the unmanned vehicle research community.

An approximation algorithm for addressing the multiple heterogeneous traveling salesman problem will be introduced.

References

[1] Y. Chen. Approximation schemes for capacity vehicle routing problems: A survey. *2023 2nd International Conference On Computational Modelling, Simulation And Optimization (ICCMSO)*. 2023, 277-282.

[2] S. Arora. Approximation schemes for NP-hard geometric optimization problems. *A survey. Mathematical Programming*, **97**: 1 (2003), 43–69.

[3] M. Bern, D. Eppstein. Approximation algorithms for geometric problems. *Approximation algorithms for NP-hard problems*, (1997), 296–345.

[4] N. Christofides. Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. Carnegie-Mellon Univ Pittsburgh Pa Management Sciences Research Group, 1976.

[5] M. Haimovich, A. H. Rinnooy Kan. Bounds and heuristics for capacitated routing problems. *Mathematics of Operations Research*, **10**: 4 (1985), 527–542.

[6] S. Arora. (1998). Polynomial time approximation schemes for Euclidean travelling salesman and other geometric problems. *Journal of the ACM (JACM)*, **45**: 5, 753–782.

[7] A. Das, C. Mathieu. A quasi-polynomial time approximation scheme for Euclidean capacitated vehicle routing. *Proceedings of the twenty-first annual ACM-SIAM symposium on Discrete Algorithms*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010, 390–403.

[8] M. Khachay, H. Zaytseva. Polynomial Time Approximation Scheme for the Euclidean Capacitated Vehicle Routing Problem. *International Conference on Control, Automation and Artificial Intelligence (CAAI)*. DEStech Publications, Inc., 2015, 43-47.

[9] F. Grandoni, C. Mathieu, H. Zhou. Unsplittable Euclidean Capacitated Vehicle Routing: A $(2 + \epsilon)$-Approximation Algorithm. *14th Innovations In Theoretical Computer Science Conference (ITCS 2023)*. **251** (2023), 63:1-63:13.

[10] S. Rathinam, R. Ravi, J. Bae, K. Sundar. Primal-dual 2-Approximation algorithm for the monotonic multiple depot heterogeneous traveling salesman problem. *In 17th Scandinavian Symposium and Workshops on Algorithm Theory (SWAT 2020). Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik.* 2020.

[11] Yadlapalli, Sai, Sivakumar Rathinam, and Swaroop Darbha. 3-approximation algorithm for a two depot, heterogeneous traveling salesman problem. *Optimization Letters*, **6** (2012), 141–152.

[12] T. Bektas. (2006). The multiple traveling salesman problem: an overview of formulations and solution procedures. *omega*, **34**: 3, 209–219.

Теория функций
(председатель д.ф.-м.н. Р.Р. Акопян)

О разложении ограниченной последовательности в сумму почти сходящейся к нулю и диадической[1]

Авдеев Н.Н.
Воронежский госуниверситет, Воронеж, Россия
nickkolok@mail.ru, avdeev@math.vsu.ru

Через ℓ_∞ обозначим пространство ограниченных последовательностей с обычной нормой $\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, и обычной полуупорядоченностью. Естественным обобщением предела с пространства сходящихся последовательностей c на ℓ_∞ является понятие банахова предела.

Определение. Линейный функционал $B \in \ell_\infty^*$ есть банахов предел (пишем: $B \in \mathfrak{B}$), если

1. $B \geq 0$, т. е. $Bx \geq 0$ для $x \geq 0$,
2. $B\mathbb{I} = 1$, где $\mathbb{I} = (1, 1, \ldots)$,
3. $B(Tx) = B(x)$ для всех $x \in \ell_\infty$, где T — оператор сдвига, т. е. $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

Существование банаховых пределов было анонсировано С. Мазуром [1] и доказано С. Банахом [2].

Критерий Лоренца. [3] *Для заданных $t \in \mathbb{R}$ и $x \in \ell_\infty$ равенство $Bx = t$ выполнено для всех $B \in \mathfrak{B}$ (для краткости пишут: $x \in ac$ и при необходимости уточняют: $x \in ac_t$) тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = t \qquad \text{равномерно по } m \in \mathbb{N}.$$

Равномерный предел в критерии Лоренца можно заменить на двойной [4, Теорема 1].

Представляет интерес вопрос об объектах, в некотором смысле двойственных пространству ac. Множество $Q \in \ell_\infty$ называют разделяющим [5, §3], если для любых неравных $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ существует такая последовательность $x \in Q$, что $B_1 x \neq B_2 x$. В частности, разделяющим является [6] множество всех последовательностей из 0 и 1.

Очень часто при изучении банаховых пределов и смежных вопросов рассматриваются последовательности, например, состоящие только из 0 и 1 (см., например, [7–10]).

Ниже мы конструктивно докажем результат, в некотором смысле обосновывающий такой подход.

Лемма 1. *Пусть $x \in \ell_\infty$, $\|x\| \leq 1$. Тогда существует такая $h \in ac_0$, что $(x + h)_n = \pm 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Построим последовательность h согласно следующим соотношениям. Положим $h_1 = 1 - x_1$. Обозначим $s_n = \sum_{k=1}^n h_k$. Будем полагать

$$h_k = \begin{cases} 1 - x_k, & \text{если } \ s_{k-1} < 0, \\ -1 - x_k, & \text{если } \ s_{k-1} \geq 0. \end{cases}$$

Тогда $|h_k| \leq 2$ и, более того, по индукции следует, что $|s_k| \leq 2$. Осталось применить критерий Лоренца к последовательности h_k:

$$\left| \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} h_k \right| \leq \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=m+1}^{m+n} h_k \right| \leq \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{m+n} h_k - \sum_{k=1}^{m} h_k \right| =$$
$$= \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{n} |s_{m+n} - s_m| \leq \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{n} (|s_{m+n}| + |s_m|) \leq \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{n} (2 + 2) = 0$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00220).

Следствие 1. *Пусть $x \in \ell_\infty$. Тогда существует такая $h \in ac_0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$*

$$(x+h)_n \in \{\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n, \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n\}.$$

Следствие 2. *Пусть $x \in \ell_\infty$. Тогда существует такая $h \in ac_0$, что $(x+h)_n = \pm\|x\|$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Полученный результат интересен в первую очередь тем, что для банаховых пределов и связанных с ними понятий очень редки теоремы о приближении или о декомпозиции. Более того, из полученного результата непосредственно следует, например, доказанное в [6] утверждение о том, что множество всех последовательностей из 0 и 1 является разделяющим.

Предложенная выше процедура, однако, в общем случае не сохраняет последовательность из ac_0, а превращает её в сумму двух последовательностей совсем другой структуры.

Список литературы

[1] S. Mazur. O metodach sumowalności. *Ann. Soc. Polon. Math. (Supplement)*, 1929, 102–107.

[2] S. Banach. Théorie des opérations linéaires, Reprint of the 1932 original. Sceaux: Éditions Jacques Gabay, 1993, iv+128.

[3] G. G. Lorentz. A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Math.*, **80**: 1 (1948), 167–190.

[4] Р. Е. Зволинский. Почти сходящиеся последовательности и операция возведения в положительную степень. *Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика.*, **3** (2022), 76–81.

[5] Е. М. Семёнов, Ф. А. Сукочев, А. С. Усачев. Геометрические свойства множества банаховых пределов. *Известия Российской академии наук. Серия математическая*, **78**: 3 (2014), 177–204.

[6] Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев. Характеристические функции банаховых пределов. *Сибирский математический журнал*, **51**: 4 (2010), 904–910.

[7] J. Connor. Almost none of the sequences of 0's and 1's are almost convergent. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **13**: 4 (1990), 775–777.

[8] Н. Н. Авдеев. О пространстве почти сходящихся последовательностей. *Математические заметки.* **105**: 3 (2019), 462–466.

[9] Н. Н. Авдеев. О разделяющих множествах меры нуль и функционалах Сачестона. *Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика*, **4** (2021), 38–50.

[10] Н. Н. Авдеев. Почти сходящиеся последовательности из 0 и 1 и простые числа. *Владикавказский математический журнал*, **23**: 4 (2021), 5–14, DOI: 10.46698/p9825-1385-3019-c.

Банаховы пределы и некоторые классы линейных операторов[1]

Авдеев Н.Н.
Воронежский госуниверситет, Воронеж, Россия
nickkolok@mail.ru, avdeev@math.vsu.ru

Зволинский Р.Е.
Воронежский госуниверситет, Воронеж, Россия
roman.zvolinskiy@gmail.com, roman-zvolinskiy@mail.ru

Обозначим через ℓ_∞ пространство ограниченных последовательностей с обычной нормой $\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, и обычной полуупорядоченностью. Естественным обобщением предела с пространства сходящихся последовательностей c на ℓ_∞ является понятие банахова предела.

Определение. Линейный функционал $B \in \ell_\infty^*$ называется банаховым пределом, если

1. $B \geq 0$, т. е. $Bx \geq 0$ для $x \geq 0$,
2. $B\mathbb{I} = 1$, где $\mathbb{I} = (1, 1, \ldots)$,
3. $B(Tx) = B(x)$ для всех $x \in \ell_\infty$, где T — оператор сдвига, т. е. $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

Кратко пишем: $B \in \mathfrak{B}$. Существование банаховых пределов было анонсировано С. Мазуром [1] и доказано С. Банахом [2]. Сачестон установил [3], что для любых $x \in \ell_\infty$ и $B \in \mathfrak{B}$

$$q(x) \leqslant Bx \leqslant p(x), \qquad \text{где} \qquad q(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \quad \text{и} \quad p(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k$$

суть нижний и верхний функционалы Сачестона соотв. Множество таких $x \in \ell_\infty$, что $p(x) = q(x)$, образует [4] пространство почти сходящихся последовательностей ac. На каждом $x \in ac$ все $B \in \mathfrak{B}$ принимают одинаковые значения.

Все банаховы пределы инвариантны относительно сдвига по определению. Однако уже для совершенно естественного — если бы мы говорили об обычной сходимости последовательностей — оператора растяжения σ_k, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, который просто повторяет каждый элемент последовательности k раз, выясняется, что относительно этого оператора инварианты не все банаховы пределы и, более того, инвариантность конкретного банахова предела зависит от выбора k.

В настоящей работе мы строим классы линейных операторов, основываясь на их свойствах инвариантности относительно банаховых пределов и функционалов Сачестона, начиная с самых широких.

Определение. Полуэберлейновым назовём такой оператор $A : \ell_\infty \to \ell_\infty$, что $BA \in \mathfrak{B}$ для некоторого $B \in \mathfrak{B}$.

Класс полуэберлейновых операторов впервые введён авторами.

Определение. Эберлейновым назовём такой оператор $A : \ell_\infty \to \ell_\infty$, что $BA = B$ для некоторого $B \in \mathfrak{B}$.

Этот класс операторов изучался в работах многих авторов [5–7], в т.ч. Эберлейна [8], в силу чего авторы и считают возможным дать ему такое название. Всякий эберлейнов оператор является полуэберлейновым по определению. Обратное неверно. Пусть B_1, B_2 есть различные крайние точки $\mathfrak{B}$ и $Hx = ((2B_2 - B_1)x) \cdot \mathbb{I}$. Тогда оператор H полуэберлейнов, но не эберлейнов.

Определение. B-регулярным назовём такой оператор $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$, что $BH \in \mathfrak{B}$ для любого $B \in \mathfrak{B}$.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект No 22-7-2-27-3) под руководством А.С. Усачева.

Этот класс введён в [9]. Там же доказано, что всякий B-регулярный оператор является эберлейновым. Можно доказать, что обратное неверно. Например, эберлейновым, но не B-регулярным является оператор $Ex = x \cdot \chi_{\cup_{m=0}^{\infty}\left[2^{2m}+1,\,2^{2m+1}\right]\cup\{1\}}$.

Заметим, что для любого B-регулярного оператора H и любого $x \in \ell_\infty$ выполнено $p(x) \geq p(Hx) \geq q(Hx) \geq q(x)$. Это приводит нас к следующему классу операторов.

Определение. Q-регулярным назовём такой оператор $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$, что для любого $x \in \ell_\infty$ выполнено равенство $q(Hx) = q(x)$.

Этот класс в данной работе вводится впервые. Всякий Q-регулярный оператор является B-регулярным; обратное неверно. Например, B-регулярным, но не Q-регулярным является оператор Чезаро (Харди): $C(x_1, x_2, x_3, ...) = \left(x_1, \dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, ..., \dfrac{x_1+...+x_n}{n}, ...\right)$.

Примерами Q-регулярных операторов являются операторы σ_k, $k \geq 2$. Но даже для таких операторов не все банаховы пределы инвариантны.

Определение. Разреженным назовём оператор $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$, определяемый следующим образом

$$H(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_{m_1}, x_{m_1+1}, \ldots, x_{n_1-1}, x_{n_1}; x_{m_2}, x_{m_2+1}, \ldots, x_{n_2-1}, x_{n_2}; \ldots),$$

где для всех $k \geqslant k_0 \in \mathbb{N}$ выполнено $m_k \leqslant n_k < m_{k+1} \leqslant n_{k+1}$, при этом

$$\lim_{k\to\infty}(n_k - m_k) = \infty.$$

Этот класс в данной работе также вводится впервые. Всякий разреженный оператор является B-регулярным. Обратное, очевидно, неверно. Более того, существует разреженный оператор, не являющийся Q-регулярным.

Список литературы

[1] S. Mazur. O metodach sumowalności. *Ann. Soc. Polon. Math. (Supplement)*, 1929, 102–107.

[2] S. Banach. Théorie des opérations linéaires. Reprint of the 1932 original, Sceaux: Éditions Jacques Gabay, 1993, iv+128.

[3] L. Sucheston. Banach limits. *Amer. Math. Monthly*, **74** (1967), 308–311.

[4] G. G. Lorentz. A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Math.*, **80**: 1 (1948), 167–190.

[5] E. M. Semenov, F. A. Sukochev. Invariant Banach limits and applications. *Journal of Functional Analysis*, **259**: 6 (2010), 1517–1541.

[6] Е. А. Алехно, Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев, А. С. Усачев. Порядковые и геометрические свойства множества банаховых пределов. *Алгебра и анализ*, **28**: 3 (2016), 3–35.

[7] Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев, А. С. Усачев. Основные классы инвариантных банаховых пределов. *Изв. РАН. Сер. матем.*, **83**: 1 (2019), 140–167.

[8] W. F. Eberlein. Banach–Hausdorff limits. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **1**: 5 (1950), 662–665.

[9] E. Alekhno, E. Semenov, F. Sukochev, A. Usachev. Invariant Banach limits and their extreme points. *Studia Math.*, **242**: 1 (2018), 79–107.

Индикатор субгармонической функции в полукольце[1]

Наумова А.А.
Курский государственный университет, Курск, Российская Федерация
Курский государственный университет, Курск, Российская Федерация
aliona.filatowa2013@yandex.ru

Мы распространяем некоторые результаты теории Фрагмена–Линделёфа в случае, когда субгармонические функции определены в полукольце $D_+(R) = \{z : |z| > R, \Im z > 0\}$. Рассматриваем субгармонические функции $v : D_+(R) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \setminus +\infty$ определенные в области $D_+(R)$. Пусть $SK(R)$ пространство субгармонических функций v в полукольце $D_+(R)$ таких, что v имеет положительную гармоническую мажоранту на каждом ограниченном подмножестве полукольца. Для уточнённого порядка $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho(r) = \varrho$, будем обозначать $r^{\rho(r)}$ как $V(r)$.

Если для субгармонической функции $v \in SK(R)$ и уточнённого порядка ρ предел

$$\sigma = \limsup_{r\to\infty} V^{-1}(r)v(re^{i\theta}) \neq 0, \infty$$

выполняется равномерно относительно θ, $\theta \in (0, \pi)$, тогда ρ называется собственным уточнённым порядком функции v.

Пусть ρ собственный уточнённый порядок функции $v(z) \in SK(R)$. Функция $h_v(\theta)$, определённая на $(0, \pi)$ равенством

$$h_v(\theta) = \limsup_{r\to\infty} V^{-1}(r)v(re^{i\theta}), \quad \theta \in (0, \pi),$$

называется индикатором функции v относительно уточнённого порядка ρ.

Одним из основных результатов в теории субгармонических функций является принцип максимума. Важным обобщением принципа максимума на случай неограниченных областей является теорема Фрагмена-Линделофа [1]. Мы доказываем аналог теоремы Фрагмена-Линделофа для полукольца $D_+(R)$.

Теорема 1 (обобщённый принцип Фрагмена-Линделёфа в $D_+(R)$). *Пусть в полукольце $D_+(R)$ задана субгармоническая функция v, для которой выполняются следующие условия*:

1) *существует число M, такое, что для любой точки ζ на границе $D_+(R)$ выполняется неравенство* $\limsup\limits_{z\to\zeta, z\in D_+(R)} v(z) \leq M$;

2) *функция v является функцией конечного порядка ϱ_R и ϱ_∞ на L_R и ∞ соответственно. Тогда для любой точки $z \in D_+(R)$ выполняется неравенство $v(z) \leq M$.*

Мы доказываем для субгармонических функций на $D_+(R)$ результат аналогичный для целых функций на плоскости, известный как свойство тригонометрической выпуклости.

Сначала сформулируем определение ϱ-тригонометрически выпуклой функции.

Определение. *Функция $h(\theta)$ определнная на интервале $\langle\alpha, \beta\rangle$ со значениями из расширенной вещественной оси $[-\infty, \infty]$ наывается ϱ-тригонометрически выпуклой на этом интервале, если для любых $\theta_1, \theta_2 \in \langle\alpha, \beta\rangle$, $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi/\varrho$, и для любого $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ выполняется неравенство*

$$h(\theta) \leq \frac{\sin\rho(\theta_2 - \theta)}{\sin\rho(\theta_2 - \theta_1)} h(\theta_1) + \frac{\sin\rho(\theta - \theta_1)}{\sin\rho(\theta_2 - \theta_1)} h(\theta_2).$$

Здесь символ $\langle a, b\rangle$ обозначает либо интервал, либо отрезок, либо один из двух видов полуинтервалов. ϱ-тригонометрически выпуклые функции впервые появились в математике в работе

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00006).

Фрагмена и Линделёфа [2]. Мы доказываем аналогичную теорему для субгармонических функций в полукольце $D_+(R)$.

Положим $h_v(\theta) = \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{v(re^{i\theta})}{V(r)}$.

Теорема 2 (ϱ-тригонометрическая выпуклость индикатора). *Пусть v субгармоническая функция заданная в полукольце $D_+(R)$, $v \in SK(R)$, и пусть $h_v(\theta)-$ индикатор роста относительно собственного порядка $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \varrho$. Тогда $h_v(\theta)$ – ϱ-тригонометрически выпуклая функция на интервале $(0, \pi)$.*

Список литературы

[1] К. Г. Малютин. Введение в теорию тригонометрически выпуклых функций. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2024.

[2] E. Phragmen, E. Lindelof. Sur une extension d'un principe classique de l'analyse monogenes dans le voisinage d'un point singulier. *Acta Math,* **31** (1908), 381–406.

О гиперциклических и хаотических операторах в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$

Рахимова А.И.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфа, Россия
alsu1405@mail.ru

Пусть задано семейство $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ выпуклых функций $\varphi_m : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ таких, что для всех $m \in \mathbb{N}$ выполнены условия:

1) $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{\varphi_m(z)}{\|z\|} = +\infty$;

2) $\lim\limits_{z\to\infty} (\varphi_m(z) - \varphi_{m+1}(z)) = +\infty$.

Определим при всех $m \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}_m = \big\{ f \in H(\mathbb{C}^n),\ f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} : \quad p_m(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} (|f(z)|e^{-\varphi_m(z)}) < \infty \big\}.$$

Тогда каждое пространство $\mathcal{F}_m$ банахово. Пространства вложены в силу 3) вполне непрерывно, $\mathcal{F}_{m+1} \subset \mathcal{F}_m,\ m \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{F}_\varphi = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_m$. Тогда $\mathcal{F}_\varphi$ с операциями сложения элементов и их умножения на комплексные числа является линейным пространством. Теперь определим в $\mathcal{F}_\varphi$ топологию проективного предела $\mathcal{F}_m,\ m \in \mathbb{N}$. Значит, $\mathcal{F}_\varphi$ является пространством Фреше–Шварца [1, с. 11].

Далее наложим при необходимости на функции φ такие требования:

3) существуют числа $a_m > 0$ и $b_m > 0$, для которых
$\varphi_{m+1}(z + t) \le \varphi_m(z) + b_m$ для любых $z \in \mathbb{C}^n$ и $t \in \mathbb{C}^n : |t| \le a_m$;

или другое условие:

4) для произвольного $R > 0$ имеется число $b_m(R, m) > 0$, для которого
$\varphi_{m+1}(z + t) \le \varphi_m(z) + b_m$ для любых $z \in \mathbb{C}^n$ и $t \in \mathbb{C}^n : |t| \le R$.

Теорема. *В пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ с условием* 3) *оператор дифференцирования $D = \frac{\partial}{\partial z_j}$, где $j \in (1; n)$, гиперциклический, а также хаотический и часто-гиперциклический.*

Теорема. *В пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ с условием* 4) *оператор сдвига $Sf(z) = f(z + a)$, где $f \in \mathcal{F}_\varphi$, $a \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, гиперциклический, а также хаотический и часто-гиперциклический.*

Список литературы

[1] В. В. Напалков. Уравнения свертки в многомерных пространствах. Москва: Наука, 1982.

Conformal Analysis of the Dirichlet Spectral Problem for the Singular p-Laplace Operator

Deneche Charaf Eddine
Tomsk State University , Tomsk, Russia
carafdenes@gmail.com

This work is devoted to the spectral estimates of the singular p-Laplace operator ($1 < p < 2$):

$$-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \lambda_p |u|^{p-2}u \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

with the Dirichlet boundary condition in conformal α-regular domains $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. This operator arises in the study of flows through porous media (p=3/2) [1].

Recall that a simply connected domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is called conformal α-regular, $\alpha > 2$, if there exists a conformal mapping $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ of Ω onto the unit disc $\mathbb{D}$ such that $\|(\varphi^{-1})' \mid L^{\alpha}(\mathbb{D})\| < \infty$ [3]. This class includes all Lipschitz simply connected domains but also includes a class of fractal domains.

A function $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ is a solution to the weak spectral problem for the singular p-Laplace operator with the Dirichlet boundary condition if

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \lambda_p \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p-2}u(x)v(x)\, dx$$

$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

It is well known [4] that the first Dirichlet eigenvalue $\lambda_p^{(1)}(\Omega)$ is simple and isolated in any bounded domain Ω. By the min-max principle, the first eigenvalue $\lambda_p^{(1)}(\Omega)$ is defined by

$$\lambda_p^{(1)}(\Omega) = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^p \, dx}{\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx}.$$

The suggested method is based on connections between the conformal theory of composition operators on Sobolev spaces [5] and the Brennan's conjecture for conformal mappings [2]. In this way, we obtain lower estimates for the first Dirichlet eigenvalue of the singular p-Laplace operator in conformal ∞-regular domains.

Theorem. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a conformal ∞-regular domain. Then for any $4/3 < p < 2$, the following inequality holds

$$\frac{1}{\lambda_p^{(1)}(\Omega)} \le \inf_{q \in I} \left\{ \|(\varphi^{-1})' \mid L^{\infty}(\mathbb{D})\|^2 \left(\int\limits_{\mathbb{D}} |(\varphi^{-1})'|^{\frac{(p-2)q}{p-q}} dy \right)^{\frac{p-q}{q}} \left(\frac{2}{\pi^{\nu}} \left(\frac{1-\nu}{1/2-\nu} \right)^{1-\nu} \right)^{p} \right\},$$

where $I = [1, 2p/(4-p))$, $\nu = 1/q - 1/p$ and $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ is a conformal mapping.

As an example we consider lower estimates of the first Dirichlet eigenvalue of singular p-Laplace operator in conformal ∞-regular domain Ω_d, where Ω_d is the image of the rectangle $Q := (0, d) \times (0, \pi)$ under the conformal mapping $\varphi(z) = e^z$.

Let $p = 3/2$. Then, putting $q = 1$, we obtain

$$\frac{1}{\lambda_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\Omega_d)} \le 7e^{2d}\sqrt{(1-e^{-d})\pi}.$$

References

[1] G. Astarita, G .Marrucci. Principles of Non-Newtonian Fluids Mechanics. New York: McGraw-Hill, 1974.

[2] J. Brennan. The integrability of the derivative in conformal mapping. *J. London Math. Soc.*, **18** (1978), 261–272.

[3] V. I. Burenkov, V. Gol'dshtein, A. Ukhlov. Conformal spectral stability for the Dirichlet–Laplacian. *Math. Nachr.*, **288**: 16 (2015), 1822–1833.

[4] A. Lê,. Eigenvalue problems for the p-Laplacian. *Nonlinear Analysis*, **64** (2006), 1057–1099.

[5] A. Ukhlov. On mappings, which induce embeddings of Sobolev spaces. *Siberian Math. J.*, **34** (1993), 185–192.

Оптимальное управление и дифференциальные игры (председатель д.ф.-м.н. М.И. Гомоюнов)

О численном вычислении угловой меры невыпуклости компакта на плоскости[1]

Васев П.А.
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
ushak@imm.uran.ru

Ершов А.А.
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
УрФУ, Екатеринбург, Россия
ale10919@yandex.ru

Кувшинов О.А.
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
УрФУ, Екатеринбург, Россия
okuvshinov@inbox.ru

Ушаков А.В.
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
ushak@imm.uran.ru

Впервые α-множества были введены в 2009 г. в работе [1] для классификации множеств достижимости по степени их невыпуклости и относятся к так называемым обобщенно выпуклым множествам.

Под проекцией p^* точки z^* на множество M мы понимаем ближайшую к z^* точку из M. Множество всех проекций точки z^* на множество M обозначим через $\Omega_M(z^*)$.

О п р е д е л е н и е 1 [2]. Пусть A — замкнутое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$. Через $H_A(z^*) = \mathrm{con}(\mathrm{co}\,\Omega_A(z^*) - z^*)$ обозначим конус, натянутый на множество $\mathrm{co}\,\Omega_A(z^*) - z^* = \{z - z^* : z \in \mathrm{co}\,\Omega_A(z^*)\}$. Определим функцию $\alpha_A(z^*) = \max\limits_{h_*, h^* \in H_A(z^*)} \angle(h_*, h^*) \in [0, \pi]$. Полагаем $\alpha_A = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$.

Множество A назовем α-множеством с *угловой мерой невыпуклости* $\alpha = \alpha_A$.

Поскольку множества достижимости управляемых систем могут вычисляться пиксельным методом, то представляет интерес вычисление их меры невыпуклости α по их конечноточечной аппроксимациям. В случае, если известна оценка кривизны границы множества достижимости (см., напр.,), то пиксельное (или конечноточечное) представление множества достижимости можно приближённо заменить многоугольником (см. алгоритм 1 ниже), а затем вычислить меру невыпуклости α многоугольника с помощью ранее разработанной программы [3].

Итак, пусть известно, что односвязный компакт $M \subset \mathbb{R}^2$ имеет дважды дифференцируемую границу с кривизной, не превышающей некоторого числа $k > 0$ и, соответственно, радиусом кривизны $R = \dfrac{1}{k}$. И пусть $\widetilde{M}$ — такая конечноточечная аппроксимация, что хаусдорфово расстояние $d(M, \widetilde{M}) = \varepsilon > 0$.

Алгоритм 1 (замена конечноточечной аппроксимации многоугольником).

1) Выберем достаточно большое число $L > 0$ и достаточно малое число $\mu > 0$.

2) Классифицируем все точки $x \in \widetilde{M}$ следующим образом: если хаусдорфово отклонение $h(B(x, 2\epsilon + \mu), \widetilde{M}) > 2\varepsilon$, то назовём точку x граничной, в противном случае — внутренней.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00424).

3) Выберем произвольную граничную точку. Обозначим её через x_1^Γ.

4) В качестве следующей точки x_2^Γ *выберем такую граничную точку, что* $L \leqslant \|x_2^\Gamma - x_1^\Gamma\| < 2L$.

5) Пока это возможно, будем выбирать точки x_k^Γ *из числа граничных так, чтобы* $\|x_k^\Gamma - x_{k-1}^\Gamma\| < 2L$, *но* $h(x_k^\Gamma, \{x_1^\Gamma, ..., x_{k-1}^\Gamma\}) \geqslant L$.

6) Множество отмеченных граничных точек $\{x_1^\Gamma, ..., x_N^\Gamma\}$ *образует вершины искомого многоугольника.*

Лемма 1. Пусть аппроксимирующая границу замкнутая ломаная $x_1^\Gamma x_2^\Gamma ... x_N^\Gamma$ с числом вершин $N > 1$ построена по алгоритму 1 для вышевведённого $\widetilde{M}$. Тогда

$$d(x_1^\Gamma x_2^\Gamma ... x_N^\Gamma, \partial M) \leqslant \varepsilon + \frac{kL^2}{2}.$$

Лемма 2. Пусть имеется отрезок длины L на плоскости. Тогда при изменении положения обоих его концов (без изменения длины отрезка) на расстояние, не превышающее $\varepsilon > 0$, угол его наклона может изменяться в обе стороны от имеющегося на величину, не превосходящую $\pi\dfrac{\varepsilon}{L}$.

Лемма 3. Обозначим через A вышепостроенную замкнутую ломанную $x_1^\Gamma x_2^\Gamma ... x_N^\Gamma$. Пусть замкнутая ломанная B получена из A путём изменения положения её вершин на расстояния, не превышающие ε, при этом длина её звеньев по-прежнему не меньше L и строго меньше $2L$. И пусть выполняется условие: $R - \dfrac{2\varepsilon}{1 - \cos\dfrac{\alpha_A}{2}} > R\Big(1 - \cos\dfrac{\alpha_A}{2}\Big) + \varepsilon$. Тогда

$$|\alpha_B - \alpha_A| \leqslant 2\arccos\left(1 - \frac{(2R^2 + 2R\varepsilon)}{(2r^2 + 2r\varepsilon)}\Big(1 - \cos\frac{\alpha_A}{2}\Big)\right) - \alpha_A,$$

где $r = \dfrac{(2R^2 + 2R\varepsilon)\Big(1 - \cos\dfrac{\alpha_A}{2}\Big)}{4\varepsilon + 2R\Big(1 - \cos\dfrac{\alpha_A}{2}\Big)}$.

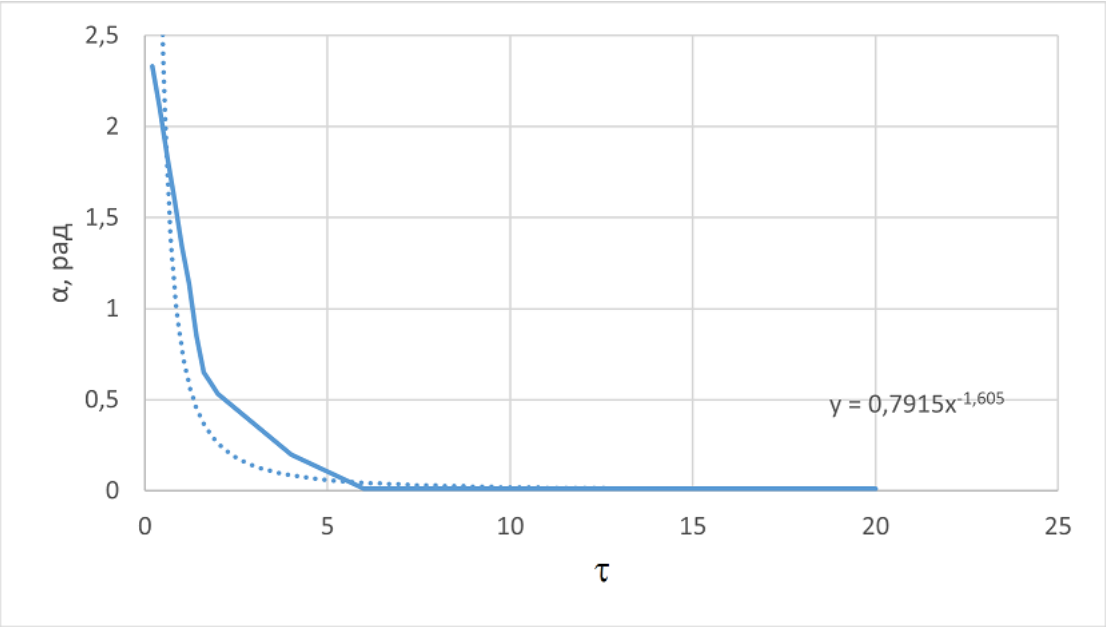
Приведённые соображения вместе с полунепрерывностью сверху функции $\alpha_A(z)$ по $z \in \mathbb{R}^2$ (см. [4, свойство 1.2]) позволяют надеяться получение оценки погрешности рассматриваемой схемы вычисления меры невыпуклости α множеств по их конечноточечным аппроксимациям.

Пример 1. Исходное множество M — объединение двух фрагментов парабол задается функцией

$$z_2 = \varphi(z_1) = \begin{cases} -0.5 \cdot (z_1 + 1)^2 + 0.5 \text{ при } z_1 \in [-2, 0], \\ 0.5 \cdot (z_1 - 1)^2 - 0.5 \text{ при } z_1 \in [0, 2]. \end{cases}$$

$$z_2 = \varphi(z_1) = \begin{cases} -0.5 \cdot (z_1 + 1)^2 + 0.5 \text{ при } z_1 \in [-2, 0], \\ 0.5 \cdot (z_1 - 1)^2 - 0.5 \text{ при } z_1 \in [0, 2]. \end{cases}$$

На рисунке 1 представлен график зависимости меры невыпуклости α для τ-окрестности M_τ множества M, построенной для $\tau \in [t_0, \vartheta] = [0, 20]$ с шагом $\Delta = 0.05$.



1: Пример 1

При $\tau = 0$ значение $\alpha = 2.88$ радиан — мера невыпуклости исходного множества. Вычисляемое значение $\alpha = 0$ принимается при $\tau = 6$. Пунктирной линией на графике обозначена аналитическая аппроксимация зависимости α от τ при приближении степенной функцией.

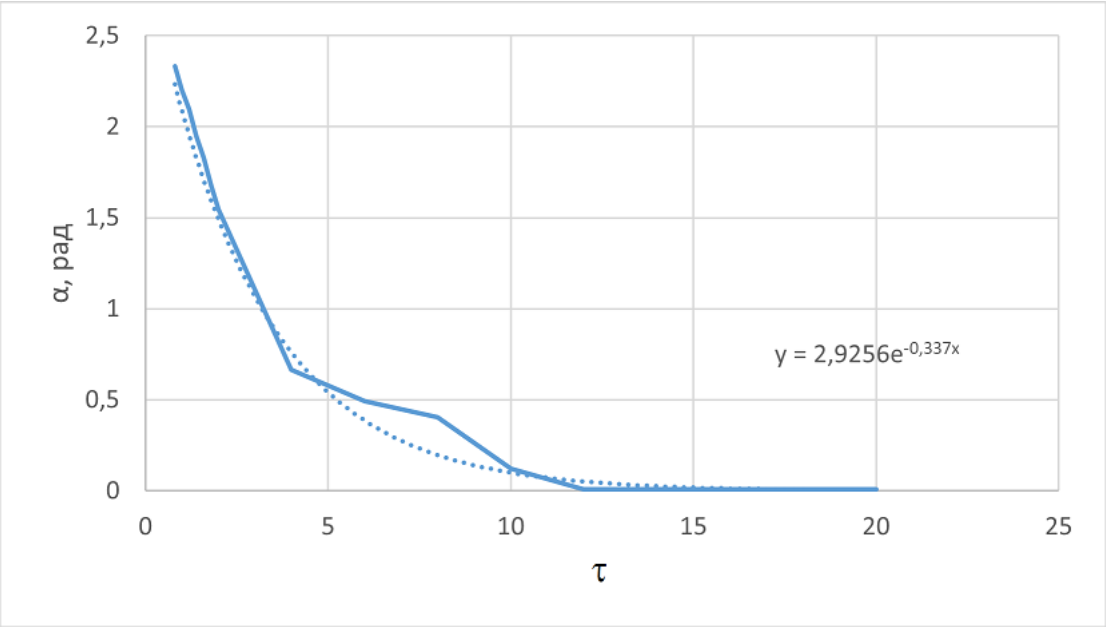
Пример 2. Исходное множество M состоит из двух непересекающихся множеств, каждое из которых состоит из двух фрагментов парабол. Эти множества смещены относительно начала координат $\mathbf{0} = (0, 0)$ по оси z_1 влево и вправо на величину $\Delta z_1 = 2.5$ и правое множество смещено вверх относительно оси z_2 на величину $\Delta z_2 = 1.5$:

$$z_2 = \varphi_1(z_1) = \begin{cases} -0.5 \cdot (z_1 + 1 + \Delta z_1)^2 + 0.5 \text{ при } z_1 \in [-2 - \Delta z_1, -\Delta z_1], \\ 0.5 \cdot (z_1 - 1 + \Delta z_2)^2 - 0.5 \text{ при } z_1 \in [-\Delta z_1, 2 - \Delta z_1]; \end{cases}$$

$$z_2 = \varphi_2(z_1) = \begin{cases} -0.5 \cdot (z_1 + 1 - \Delta z_1)^2 + 0.5 + \Delta z_2 \text{ при } z_1 \in [-2 + \Delta z_1, \Delta z_1], \\ 0.5 \cdot (z_1 - 1 - \Delta z_2)^2 - 0.5 + \Delta z_2 \text{ при } z_1 \in (\Delta z_1, 2 + \Delta z_1]. \end{cases}$$

$$z_2 = \varphi(z_1) = \begin{cases} -0.5 \cdot (z_1 + 1)^2 + 0.5 \text{ при } z_1 \in [-2, 0], \\ 0.5 \cdot (z_1 - 1)^2 - 0.5 \text{ при } z_1 \in [0, 2]. \end{cases}$$

На рисунке 1 представлен график зависимости угловой меры невыпуклости M_τ при $\tau \in [t_0, \vartheta] = [0, 20]$ с шагом $\Delta = 0.05$.



2: Пример 2

При $\tau = 0$ значение $\alpha = 3.14$ радиан — мера невыпуклости исходного множества. Вычисляемое значение $\alpha = 0$ принимается при $\tau = 11$. Пунктирной линией на графике обозначена аппроксимация зависимости α от τ экспоненциальной функцией.

Список литературы

[1] А. А. Успенский, В. Н. Ушаков, А. Н. Фомин. α-Множества и их свойства. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2004. Деп. в ВИНИТИ 02.04.2004, № 543-В2004.

[2] В. Н. Ушаков, А. А. Ершов. О соотношении между ?-множествами и слабо выпуклыми множествами. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **30**: 4 (2024), 276–285.

[3] А. А. Ершов, А. В. Ушаков. Программный комплекс для вычисления степени невыпуклости множеств на плоскости в терминах альфа-множеств. Регистрационный номер: 622101900156-3 Дата регистрации 19 октября 2022 г.

[4] В. Н. Ушаков, А. А. Успенский. Теоремы об отделимости α-множеств в евклидовом пространстве. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **22**: 2 (2016), 277–291.

Стабилизация траектории решения нелокального уравнения неразрывности

Волков А.М.
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
volkov@imm.uran.ru

В докладе рассматривается задача Коши для нелокального уравнения неразрывности

$$\partial_t m_t + \nabla \cdot (f(x, m_t, u) m_t) = 0, \quad m_0 = m_*.$$

Здесь $f : \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \times U \to \mathbb{R}^d$ — векторное поле, а U — компактное метрическое пространство. Фазовым пространством для данного уравнения является пространство вероятностных мер с конечным вторым абсолютным моментом $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, снабженное метрикой Канторовича $W_2(\cdot, \cdot)$ (см., например, [1]). Данное уравнение описывает бесконечную систему однотипных частиц, динамика которых задается уравнением

$$\dot{x} = f(x, m_t, u).$$

Решение данного уравнения понимается в смысле действия бесконечно-дифференцируемыми функциями с компактным носителем на меру. Траектории понимаются в смысле Красовского-Субботина.

Следуя подходу, предложенному в работе [2], мы приводим понятия управляющей функции Ляпунова, ее inf-конволюции и проксимального субдифференциала, которые строятся аналогично случаю классических динамических систем. Главным результатом является построение стратегии, стабилизирующей положение траектории решения, как в локальном, так и в глобальном смысле.

Список литературы

[1] F. Santambrogio. Optimal Transport for Applied Mathematicians: Calculus of Variations, PDEs, and Modeling. (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications), vol. 87. Springer International Publishing, 2015.

[2] F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, E.D. Sontag, A.I. Subbotin. Asymptotic controllability implies feedback stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42**: 10 (1997), 1394–1407.

Существование квадратичных функционалов Ляпунова-Красовского для систем с последействием

Долгий Ю.Ф.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
Yurii.Dolgii@imm.uran.ru

Линейная автономная система дифференциальных уравнений с последействием порождает в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-\tau, 0), \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_H = \mathbf{y}^\top(0)\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{y}^\top(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$, однопараметрическую сильно непрерывную полугруппу ограниченных операторов $\mathbf{T}(t) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $t \geq 0$. Для этой полугруппы неограниченный инфинитезимальный оператор $\mathbf{A} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, с областью определения $D(\mathbf{A}) = \mathbb{W}_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, задается формулами [1–3]

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{x}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad (\mathbf{A}\mathbf{x})(0) = \int_{-\tau}^0 [d\eta(s)]\mathbf{x}(s)ds. \tag{1}$$

Здесь матричнозначная функция η имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-\tau, 0]$, $\eta(0) = 0$, $\tau > 0$. В пространстве $\mathbb{W}_2^1 = \mathbb{W}_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ можно ввести метрику гильбертова пространства, используя скалярное произведение $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{W_2^1} = \mathbf{y}^\top(0)\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{y}'^\top(\vartheta)\mathbf{x}'(\vartheta)d\vartheta$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{W}_2^1$. Формулы $\mathbf{x}(\vartheta) = (\mathbf{\Pi}z)(\vartheta)$, $\mathbf{x}(\vartheta) = z(0) - \int_\vartheta^0 z(s)ds$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, определяют изометрический изоморфизм $\mathbf{\Pi}$ пространств $\mathbb{H}$ и $\mathbb{W}_2^1$.

Использование обобщенных решений систем дифференциальных уравнений с последействием с гильбертовым пространством состояний позволяет для общих представлений квадратичных функционалов Ляпунова-Красовского v и их производных применять формулы

$$v(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{V}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_H, \quad \frac{dv(\mathbf{x})}{dt} = \langle (\mathbf{V}\mathbf{A} + \mathbf{A}^*\mathbf{V})\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_H = -\langle \mathbf{W}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_H, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}.$$

Здесь $\mathbf{V} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ — линейный ограниченный самосопряженный оператор, $\mathbf{W} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ — линейный неограниченный самосопряженный оператор. В проблеме обращения второго метода Ляпунова для линейных автономных систем дифференциальных уравнений требуется для заданного линейного самосопряженного оператора $\mathbf{W}$ найти решение $\mathbf{V}$ операторного уравнения Ляпунова

$$\mathbf{V}\mathbf{A} + \mathbf{A}^*\mathbf{V} + \mathbf{W} = 0. \tag{2}$$

Спектральное множество $\sigma(\mathbf{A})$ инфинитезимального оператора (1) состоит только из собственных чисел оператора $\mathbf{A}$, а его резольвентный оператор $\mathbf{R}(\lambda; \mathbf{A})$, $\lambda \in \mathbb{C}/\sigma(\mathbf{A}) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ является вполне непрерывным.

Теорема. *Если для любых собственных чисел $\lambda, \mu \in \sigma(\mathbf{A})$ выполняется условие*

$$\lambda + \mu \neq 0, \tag{3}$$

то для любого линейного самосопряженного оператора $\mathbf{W} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, сужение которого на пространство $\mathbb{W}_2^1$ является ограниченным оператором, операторное уравнение (2) имеет единственное решение с линейным ограниченным самосопряженным оператором $\mathbf{V} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$.

Если все собственные числа оператора $\mathbf{A}$ имеют отрицательные действительные части, то условие (3) теоремы выполняется. Тогда из положительности оператора $\mathbf{W}$ следует положительность

решения $\mathbf{V}$ операторного уравнения (2). Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваемая теорема получена А.М. Ляпуновым [4]. В случае ограниченного инфинитезимального оператора $\mathbf{A}$ ее доказательство приведено в монографии [5], в которой при нахождении решения операторного уравнения (2) используется понятие интеграла Ф. Рисса

$$\mathbf{V} = \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_A} \frac{\mathbf{R}(\lambda; \mathbf{A})\mathbf{W}\mathbf{R}(\mu; \mathbf{A}^*)}{\lambda + \mu} d\lambda d\mu,$$

где Γ_A — гладкий контур на комплексной плоскости, охватывающий спектральное множество $\sigma(\mathbf{A})$, при обходе которого в положительном направлении спектральное множество остается слева. Для линейных автономных систем дифференциальных уравнений с последействием теорема доказана в монографии [6] для специального конечномерного оператора $(\mathbf{W}\mathbf{x})(0) = W\mathbf{x}(0)$, $(\mathbf{W}\mathbf{x})(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$, с произвольной матрицей W, когда все собственные числа оператора $\mathbf{A}$ имеют отрицательные действительные части, а для произвольных собственных чисел этого оператора, удовлетворяющих условию (3), — в работе [7]. В [6] при построении представления квадратичного функционала v Ляпунова-Красовского применялась формула общего решения для системы дифференциальных уравнений с последействием. В [8] при нахождении представления операторного решения $\mathbf{V}$ уравнения (2) использовался общий вид линейного непрерывного оператора, действующего в пространстве функций суммируемых с квадратом [3]. В настоящей работе предлагается метод, который при нахождении оператора $\mathbf{V}$ применяет интеграл Ф. Рисса и аналитическое представление резольвентного оператора $\mathbf{R}(\lambda; \mathbf{A})$, $\lambda \in \mathbb{C}/\sigma(\mathbf{A})$.

Список литературы

[1] Н. Н. Красовский. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

[2] С. Г. Крейн. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.

[3] Ю. Ф. Долгий. Квадратичные функционалы Ляпунова-Красовского для линейных автономных систем с последействием. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **16**: 5 (2010), 48–56.

[4] И. Г. Малкин. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.

[5] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

[6] V.L. Kharitonov. Time-Delay Systems: Lyapunov Functional and Matrices. Basel, Switzerland: Burkh*ä*user, 2013.

[7] А. В. Егоров. Новое представление матрицы Ляпунова для систем с запаздыванием. *Материалы Международной конференции "Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры", посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского.* Екатеринбург: ИММ УрО РАН, ООО "Издательство УМЦ УПИ" , 2024, 118–122.

[8] Ю. Ф. Долгий. Вычисление квадратичных функционалов Ляпунова-Красовского для линейных автономных систем с последействием. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **19**: 4 (2013), 95–106.

Вычислительные процедуры построения равновесных решений в динамических игровых моделях экономики и биологии

Красовский Н.А.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
n.a.krasovskii@gmail.com

Тарасьев А.М.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
Уральский Федеральный Университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
tam@imm.uran.ru, a.m.tarasyev@urfu.ru

Работа посвящена анализу среднеинтегральных показателей выигрышей для траекторий динамического равновесия [3, 4] и репликаторной динамики [1, 6] в биматричных координационных играх. В таких координационных постановках игроки получают наибольшие выигрыши при выборе одинакового типа поведения. В частности, особенностью координационной игры размерности 2×2 является наличие трех статических равновесий по Нэшу, два из которых обладают свойствами точек максимума Парето. В динамической постановке траектории координационных игр оцениваются среднеинтегральными выигрышами для широкого круга моделей [7], возникающих в экономике и биологии. В задачах оптимального управления [5] и динамических играх среднеинтегральные показатели применяются для синтеза гарантирующих стратегий, которые участвуют, в том числе, в конструкциях динамического равновесия по Нэшу [3, 4]. Кроме того, среднеинтегральные выигрыши являются естественным инструментом оценки в моделях максимального среднего временного сбора [2] и моделях репликаторной динамики [1, 6]. В настоящей работе проводится сравнение значений среднеинтегральных показателей для траекторий репликаторной динамики и траекторий, порожденных гарантирующими стратегиями в конструкции динамического равновесия по Нэшу. Проведено исследование траекторий смешанной динамики, в которой один из игроков использует гарантирующую стратегию, а второй игрок ориентируется на поведение репликаторной динамики.

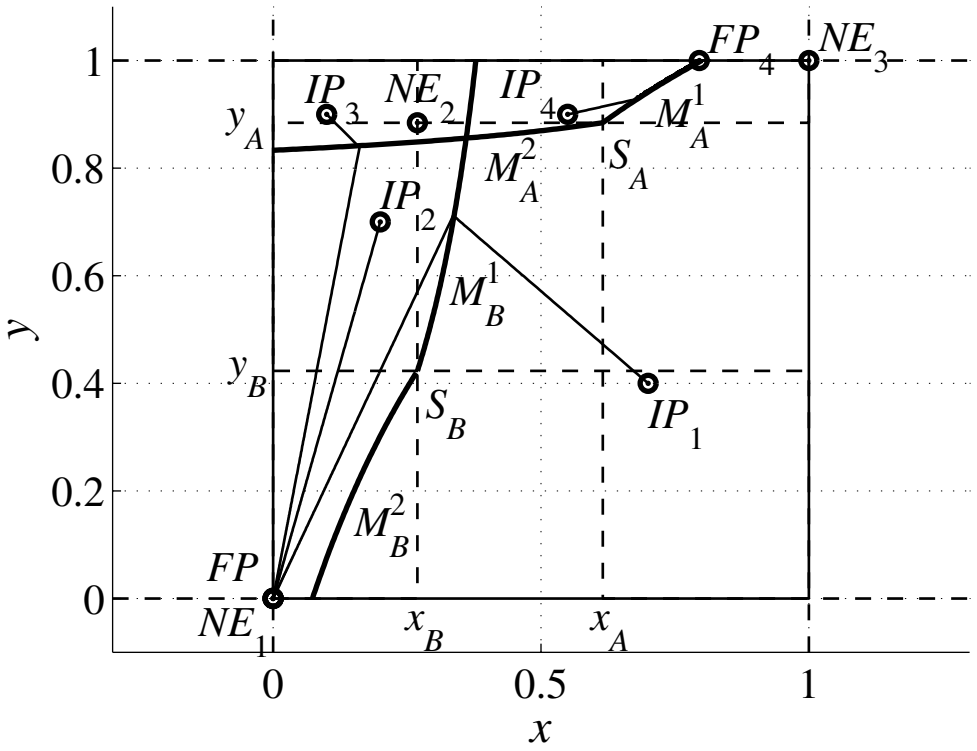
В качестве примера рассматривается игровая модель, в которой две компании инвестируют денежные средства в два различных проекта. Матрицы выигрышей игроков отражают доходность от инвестиций в виде процентных ставок.

Структура построения динамического равновесия по Нэшу представлена на Рис. 1. Показаны седловые точки S_A и S_B статической игры, точки статического равновесия по Нэшу NE_1, NE_2, NE_3, кривые переключения $M_A = M_A^1 \cup M_A^2$ и $M_B = M_B^1 \cup M_A^B$ управлений игроков. Равновесные траектории стартуют из начальных точек IP_1, IP_2, IP_3, IP_4, двигаются вдоль характеристик уравнений Гамильтона-Якоби, встречаются с кривыми переключения, на которых меняют свою ориентацию, и сходятся к конечным точкам FP и FP_4. Отметим, что конечная точка FP_4 не совпадает с точкой равновесия по Нэшу NE_3, обладающей свойствами максимума Парето.

Вычислительные эксперименты показывают, что значения функционалов выигрышей игроков в конечных точках движения равновесных траекторий превосходят значения выигрышей в точке статического равновесия NE_2, являющейся конкурентной и не обладающей свойствами максимума Парето. Отметим, что в точке FP_4, расположенной на границе квадрата игры, гарантирующие стратегии обеспечивают результат, который сближает интересы игроков.

Список литературы

[1] А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. Динамические системы и модели биологии. Москва: Физматлит, 2010.



1: Равновесные траектории, порожденные гарантирующими стратегиями управления, в координационной игре модели инвестиций.

[2] Е. В. Винников, А. А. Давыдов, Д. В. Туницкий. Существование максимального среднего временного сбора в КПП–модели на сфере при постоянном и импульсном отборах. *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **514**: 1 (2023), 59–64.

[3] А. Ф. Клейменов. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993.

[4] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974.

[5] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Наука, 1961.

[6] J. Hofbauer, K. Sigmund. The theory of evolution and dynamic systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.

[7] N. A. Krasovskii, A. M. Tarasyev. Equilibrium Trajectories in Dynamical Bimatrix Games with Average Integral Payoff Functionals. *Automation and Remote Control.*, **79**: 6 (2018), 1148–1167.

Итерационные методы построения субоптимальных покрытий плоских фигур в вариационной метрике в неоднородной среде

Лебедев П.Д.
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, РФ
pleb@yandex.ru

Успенский А.А.
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, РФ
uspen@imm.uran.ru

Рассматривается задача об отыскании оптимального покрытия компакта $M \subset \mathbb{R}^2$, вложенного в область $D \subseteq \mathbb{R}^2$, наборами из заданного числа n «кругов» $O_f(\mathbf{s}_i, r) \triangleq \{\mathbf{y} \in D\colon \rho_f(\mathbf{y}, \mathbf{s}_i) \leqslant r\}$, $r > 0, i = \overline{1,n}$ в вариационной метрике, заданной непрерывной положительной функцией $f(\mathbf{x})\colon D \to (0, +\infty)$. Расстояние $\rho_f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ между точками $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ считается равным минимальному времени, за которое сигнал может пройти из $\mathbf{a}$ в $\mathbf{b}$ по произвольной кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset D$. Скорость его распространения в точке $\mathbf{x} \in D$ равна $f(\mathbf{x})$, сигнал может распространяться во все стороны. Похожие задачи рассматривались, например, в [1].

Построение кругов при заданном массиве $S_n = \{\mathbf{s}_i\}_{i=1}^n$ выполняется методами геометрической оптики, которые имитируют распространение луча в неоднородной среде [2]. На первом этапе разработанного алгоритма выполняется разбиение компакта M на обобщённые зоны Дирихле $M_i = \{\mathbf{m} \in M\colon \rho_f(\mathbf{m}, \mathbf{s}_i) = \min\limits_{j=\overline{1,n}} \rho_f(\mathbf{m}, \mathbf{s}_j)\}, i = \overline{1,n}$. Затем выделяется для всех центров $\mathbf{s}_i, i = \overline{1,n}$, кругов наиболее удалённые от в них в вариационной метрике точки $\mathbf{m}_j \in M_i, j = \overline{1,n_i}$, и аппроксимации траекторий $\Gamma_j, j = \overline{1,n_i}$, соединяющих $\mathbf{s}_i$ с $\mathbf{m}_j$, $j = \overline{1,n_i}$. Итерационное изменение координат точек $\mathbf{s}_i, i = \overline{1,n}$, производится путём сдвига каждой точки $\mathbf{s}_i$ в сторону односторонних касательных к траекториям $\Gamma_j, j = \overline{1,n_i}$. Заметим, что если текущий центр $\mathbf{s}_i$ расположен так, что зона M_i может быть вложена в «круг» $O_f(\mathbf{s}_i, r)$ минимально возможного радиуса r, то число n_i должно быть не меньше 2, чтобы траектории $\Gamma_j, j = \overline{1,n_i}$, расходились в разные стороны от $\mathbf{s}_i$. Аналогичные методы использовались авторами в [3].

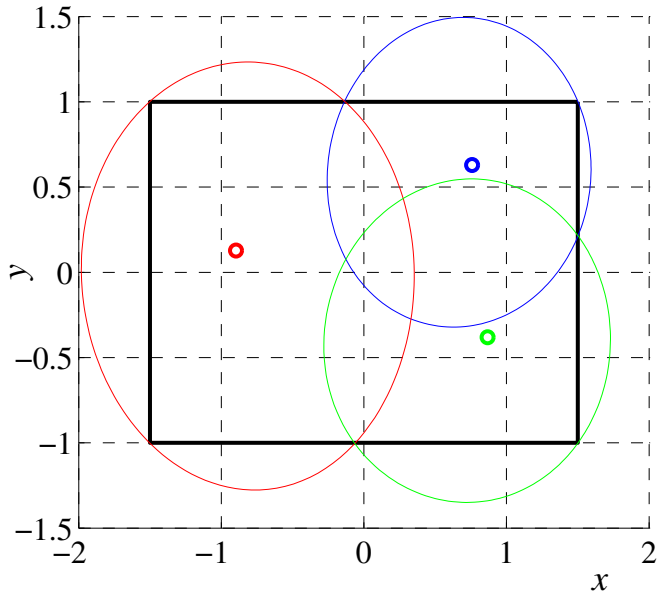
Пример. *Пусть требуется построить оптимальное покрытие «кругами» прямоугольника* $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon |x| \leqslant 1.5, |y| \leqslant 1\}$ *при* $n = 3$ *для функции*

$$f(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{3}{6(x + 0.5)^2 + 2(y + 0.5)^2 + 6} + \frac{1}{2(x + 1)^2 + 4(y + 1)^2 + 4}$$

с областью определения $D = \mathbb{R}^2$.

Полученный с помощью программного комплекса [4] результат даёт массив точек $S_3 = \{(-0.8971, 0.1271), (0.7587, 0.6296), (0.8677, -0.3811)\}$. *Радиус «кругов» аппроксимации оптимального покрытия* $r = 1.2675$. *Граница компакта* M *показана на рис. 2 чёрной линией, центр* $\mathbf{s}_1$ *и граница «круга»* $O_f(\mathbf{s}_1, r)$ *обозначены красным цветом, центр* $\mathbf{s}_2$ *и граница «круга»* $O_f(\mathbf{s}_2, r)$ *— зелёным цветом, центр* $\mathbf{s}_3$ *и граница «круга»* $O_f(\mathbf{s}_3, r)$ *— синим цветом.*

На рис. 2 видно, что форма «кругов» в вариационной метрике существенно отличается от обычных кругов, они похожи на овалоиды, описывающие распростреление волны от точки в неоднородной среде, см., например, [5]. При этом их границы проходят через вершины прямоугольника M и пересекаются между собой на его сторонах. Это свидетельствует о том, что решение является локально оптимальным (субоптимальным): при меньшем r или если изменить координаты одной из точек $\mathbf{s}_i, i = \overline{1,3}$, набор «кругов» с центрами в точках из S_3 не покроет M. Полученные результаты могут применяться, в частности, для решения задач транспортной логистики в неоднородной среде [6].



2: Множество M, точки $\mathbf{s}_i$ и границы «кругов» $O_f(\mathbf{s}_i, r)$ в вариационной метрике при $i = \overline{1,3}$.

Список литературы

[1] П. Д. Лебедев, А. А. Лемперт, А. Л. Казаков. Алгоритмы построения оптимального покрытия плоских фигур в динамической метрике. *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **60** (2022), 58–72.

[2] Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.

[3] П. Д. Лебедев, А. А. Успенский. Алгоритмы построения оптимальных сетей для задач транспортной логистики в случае неоднородной среды. *Вестник Гуманитарного университета*, **3**: 42 (2023), 17–22.

[4] П. Д. Лебедев, А. А. Успенский. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024680657 Российская Федерация. Программа построения оптимальных покрытий плоских фигур кругами в вариационной метрике для неоднородной среды, заявка № 2024669579: заявл. 22.08.2024: опубл. 02.09.2024.

[5] С. Н. Кружков. Обобщённые решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала. I. Постановка задач, теоремы существования, единственности и устойчивости, некоторые свойства решений. *Матем. сб.*, **98(140)**: 3(11) (1975), 450–493.

[6] Ю. М. Неруш, С. В. Саркисов. Транспортная логистика: учебник для вузов. М.: Юрайт, 2023.

Одна нестационарная линейная задача группового преследования с производными дробного порядка[1]

Мачтакова А.И.
Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
bichurina.alyona@yandex.ru

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$, описываемая системой вида

$$\big(D^{(\alpha)}\big) z_{ij} = A_{ij}(t) z_{ij} + u_i - v, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0, \quad u_i \in U_i, \quad v \in V. \tag{1}$$

Здесь $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$, $z_{ij}, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, U_i, V — компакты $\mathbb{R}^k$, $\alpha \in (0,1)$, $D^{(\alpha)} f$ — производная по Капуто функции f порядка α [1], $A_{ij}(t)$ — непрерывные матричные функции порядка $k \times k$. Заданы терминальные множества M_{ij}^* вида

$$M_{ij}^* = M_{ij} + M_{ij}^0,$$

где M_{ij} — линейное подпространство $\mathbb{R}^k$, M_{ij}^0 — выпуклые компакты из L_{ij} — ортогонального дополнения к M_{ij} в $\mathbb{R}^k$. Считаем, что $z_{ij}^0 \notin M_{ij}^*$ для всех $i \in I$, $j \in J$.

Определение 1. Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение U_i^0, ставящее в соответствие начальным позициям $z^0 = (z_{ij}^0, i \in I, j \in J)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающих E_j, $j \in J$, измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в U_i.

Определение 2. В дифференцальной игре происходит поимка хотя бы одного убегающего, если существуют момент $T > 0$ и квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, такие что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T]$ существуют момент $\tau \in [t_0, T]$ и номера $p \in I$, $q \in J$, для которых $z_{pq}(\tau) \in M_{pq}$.

Введем следующие обозначения. $\mathbb{E}$ — единичная матрица порядка $k \times k$, $\pi_{ij} : \mathbb{R}^k \to L_{ij}$ — оператор ортогонального проектирования,

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{+\infty} s^{\beta-1} e^{-s} ds, \qquad {}_\tau J_t f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad G_{ij}^0(t,\tau) = \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{E},$$

$$G_{ij}^{l+1}(t,\tau) =_\tau J_t\big(A_{ij}(t) G_{ij}^l(t,\tau)\big), \ l = 0, 1, \ldots, \quad \Phi_{ij}(t,\tau) = \sum_{l=0}^{+\infty} G_{ij}^l(t,\tau),$$

$$\tilde{G}_{ij}^0(t,\tau) = \mathbb{E}, \quad \tilde{G}_{ij}^{l+1}(t,\tau) =_\tau J_t\big(A_{ij}(t) \tilde{G}_{ij}^l(t,\tau)\big), \ l = 0, 1, \ldots, \quad \Psi_{ij}(t,\tau) = \sum_{l=0}^{+\infty} \tilde{G}_{ij}^l(t,\tau),$$

$$W_{ij}(t,\tau,v) = \pi_{ij} \Phi_{ij}(t,\tau)\big(U_i - v\big), \quad W_{ij}(t,\tau) = \bigcap_{v \in V} W_{ij}(t,\tau,v).$$

Предположение 1. *Существует отображение $q : I \to J$, такое что для всех $i \in I$, $t \geqslant t_0$, $\tau \in [t_0, t]$ выполнено условие*

$$W_{iq(i)}(t,\tau) \neq \varnothing.$$

Выберем произвольные измеримые селекторы $\gamma_{iq(i)}(t,\tau) \in W_{iq(i)}(t,\tau)$ [2], зафиксируем их и обозначим

$$\xi_{iq(i)}(t) = \pi_{iq(i)} \Psi_{iq(i)}(t,t_0) z_{iq(i)}^0 + \int_{t_0}^t \gamma_{iq(i)}(t,\tau) d\tau.$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект FEWS-2024-0009).

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение 1 и существуют* $T > t_0$, $l \in I$ *такие, что* $\xi_{lq(l)}(T) \in M^0_{lq(l)}$. *Тогда в дифференцальной игре происходит поимка.*

Рассмотрим произвольную диагональную квадратную матрицу Λ_i порядка $k_i \times k_i$, где k_i — размерность $L_{iq(i)}$, вида

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{i2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{ik_i} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{ik_i}).$$

Будем отождествлять матрицу Λ_i с вектором $(\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{ik_i})$. Неравенство $\Lambda_i \geqslant 0$ будем поимать покоординатно. Введем многозначные отображения

$$\mathcal{M}_i(t,\tau,v) = \big\{\Lambda_i \geqslant 0 \ : \ \Lambda_i\Big(M^0_{iq(i)} - \xi_{iq(i)}(t)\Big) \cap \Big(W_{iq(i)}(t,\tau,v) - \gamma_{iq(i)}(t,\tau)\Big) \neq \varnothing\big\}.$$

Определим скалярные функции

$$\lambda^0_i(t,\tau,v) = \sup_{\Lambda_i \in \mathcal{M}_i(t,\tau,v)} \min_{l \in J_i} \lambda_{il}(t,\tau,v), \text{ где } \ J_i = \{1, \dots, k_i\}. \tag{2}$$

Предположение 2. *Для всех* $t \geqslant t_0$, $\tau \in [t_0, t]$, $v \in V$ *в* (2) *достагается точная верхняя грань.*

Определим множество

$$\mathcal{M}^*_i(t,\tau,v) = \big\{\Lambda_i(t,\tau,v) \in \mathcal{M}_i(t,\tau,v) : \lambda^0_i(t,\tau,v) = \min_{l \in J_i} \lambda_{il}(t,\tau,v)\big\}.$$

Зафиксируем измеримые по (τ, v) селекторы из $\mathcal{M}^*_i(t,\tau,v)$ и обозначим их

$$\Lambda^*_i(t,\tau,v) = \operatorname{diag}(\lambda^*_{i1}(t,\tau,v), \dots, \lambda^*_{ik_i}(t,\tau,v)).$$

Определим функцию

$$\delta(t,\tau) = \inf_{v \in V} \max_{i \in I} \min_{l \in J_i} \lambda^*_{il}(t,\tau,v).$$

и число

$$T_0 = \inf\{t \geqslant t_0 : \inf_{v(\cdot)} \max_{l \in I} \min_{p \in J_l} \int_{t_0}^{t} \lambda^*_{lp}(t,s,v(s))ds \geqslant 1\}.$$

Предположение 3. *1. Для всех* $\tau \in [t_0, T_0]$, $v \in V$, $l \in I$, $J^0_l \subset J_l$ *селекторы* $B_l(T_0,\tau,v) = \operatorname{diag}(\beta_{l1}(T_0,\tau,v), \dots, \beta_{lk_l}(T_0,\tau,v))$ *вида*

$$\beta_{lp}(T_0,\tau,v) = \begin{cases} \lambda^*_{lp}(T_0,\tau,v), & \text{если } p \in J^0_l, \\ 0, & \text{если } p \notin J^0_l \end{cases}$$

удовлетворяют условию $B_l(T_0,\tau,v) \in \mathcal{M}_l(T_0,\tau,v)$.

2. $\int_{t_0}^{T_0} B_l(T_0,s,v(s))M^0_{lq(l)}ds \subset M^0_{lq(l)}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения 1–3,* $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} \delta(t,s)ds = +\infty$. *Тогда в дифференцальной игре происходит поимка хотя бы одного убегающего.*

Список литературы

[1] M. Caputo. Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II *Geophys. R. Astr. Soc.*, **13** (1967), 529–539.

[2] J. P. Aubin, H. Frankowska. Set-Valued Analysis . Boston: Birkhauser, 1990.

Линейные дифференциальные игры с многомерным фазовым вектором: построение экстремальных управлений и оптимальных траекторий

Михайлов А.В.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия
e-mail: tigr-mav@yandex.ru

В докладе рассматриваются линейные дифференциальные игры с многомерным фазовым вектором, геометрическими ограничениями на управления игроков и выпуклым терминальным множеством.

$$\begin{gathered}\dot{x} = D(t)u + E(t)v, \quad t \in [t_0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d. \\ u \in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^q, \\ x(T) \in M.\end{gathered} \tag{1}$$

Ранее автором [1] для рассматриваемой игры была предложена численная геометрическая процедура приближенного построения t-сечений максимального стабильного моста [2] (множества разрешимости), реализующая второй метод Понтрягина [3]. Метод Понтрягина носит рекуррентный характер и производит приближения $W(t_i)$ временных сечений максимального стабильного моста для игры (1):

$$\begin{gathered}W(t_i) = (W(t_{i+1}) + (-\Delta_i)D(t_i)P) \overset{*}{-} \Delta_i E(t_i)Q, \\ W(t_N) = M, \quad \Delta_i = t_{i+1} - t_i.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь символом «+» обозначена алгебраическая сумма (сумма Минковского), а символом «$\overset{*}{-}$» — геометрическая разность (разность Минковского). Моменты времени t_i берутся из некоторой временной сетки в интервале $[t_0, T]$, $t_N = T$. В терминах статьи [3] множества $W_i(t)$ называются альтернированными интегралами.

В предлагаемом докладе рассматриваются геометрические процедуры нахождения точки выпуклого многомерного многогранника, ближайшей к заданной точке. С использованием этой процедуры разработана процедура построения управлений экстремального сдвига на сечения $W_i(t)$ (2) максимального стабильного моста для первого и второго игроков. Создана программа моделирования движений системы с использованием различных управлений игроков: оптимальных, константных, случайных и др. Приводятся результаты соответствующих вычислений. Также обсуждаются вопросы визуализации полученных результатов для случаев двух- и трёхмерного фазового вектора.

Список литературы

[1] A.V. Mikhailov, S.S. Kumkov. Linear Differential Games with Multi-Dimensional Terminal Target Set: Geometric Approach. *EPiC Series in Computing*, **104** (2024), 221–242.

[2] Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[3] Л.С. Понтрягин. Линейные дифференциальные игры убегания. *Труды МИАН СССР*, **112** (1971), 30–63.

О методе упаковки геодезических кругов в сферический сегмент с использованием плоской проекции

Нгуен Д. М.
Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск, Российская Федерация
nguyenducminh.mt@gmail.com

Построение максимальных (плотных) упаковок является классической задачей вычислительной геометрии, в которой требуется разместить однотипные объекты в ограниченное множество как можно плотнее [1]. Подобные задачи на плоскости возникают при сегментации логистических зон, размещении базовых станций, станций радиовещания и т.д [2]. Более сложные постановки рассматриваются при построении сети лазерных динамических спутников LAGEOS (Laser Geodynamics Satellite) [3], при распределении детекторов сигнала и детекторов солнечной энергии, при проектировании сферической фокальной поверхности в оптике [4]. В этом случае необходимо решить задачу об упаковке на некоторой поверхности в $\mathbb{R}^3$, в частности, сферическом сегменте. Интерес представляют упаковки достаточно большого количества (от 1000) геодезических кругов. В работе [5] предлагается метод, позволяющий упаковывать до 200 кругов, и при этом время расчета весьма велико. Отметим, что одной из ключевых задач является выбор начального приближения, позволяющего существенно сократить время расчетов. Целью данной работы является разработка метода выбора начального приближения с использованием известных оптимальных упаковок кругов на плоскости [6] и его последующего улучшения [7, 8].

Постановка задачи. Задана единичная сфера Θ с центром O, который находится в начале координат.

$$\Theta = \{(\varphi, \beta) \colon 0 \leqslant \varphi < 2\pi, -\pi/2 \leqslant \beta \leqslant \pi/2\},$$

где (φ, β) — долгота и широта соответственно. На сфере задан сферический сегмент $S(A, \theta) \subset \Theta$, где A — центр сегмента и одновременно северный полюс сферы, θ — угловой размер сегмента ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$). Пусть ∂S — замкнутая кривая на сфере, ограничивающая поверхность $S(A, \theta)$. Необходимо разместить N геодезических кругов C_i с центрами $O_i = (x_i, y_i, z_i)$ и одинаковыми радиусами R, чтобы круги C_i не выходили за границу ∂S, не пересекались и радиус R был бы максимальным. Тогда задача имеет вид:

$$R \to \max, \tag{3}$$

$$\rho(O_i, O_j) \geq 2R, \forall i, j = \overline{1, N}, i \neq j \tag{4}$$

$$\rho(O_i, P) \geq R, \forall P \in \partial S, i = \overline{1, N} \tag{5}$$

$$O_i \in S(A, \theta), i = \overline{1, N}, \tag{6}$$

где $\rho(a, b)$ - геодезическое расстояние между двумя точками a и b на сфере,

$$\rho(a, b) = \arccos \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\|a\|\|b\|} = \arccos\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right). \tag{7}$$

Целевая функция (3) максимизирует радиус кругов. Условие (4) гарантирует, что геодезические круги не пересекаются друг с другом, условие (5) означает, что круги не выходят за границу поверхности, а условие (6) значит, что все центры кругов располагаются на поверхности S.

О методе решения задач. Предлагаемый метод включает следующие этапы:

- сферический сегмент проектируется на круг радиуса θ так, что сохраняются некоторые свойства геодезического расстояния между полюсом и точками сферы;

- круг преобразовывается в единичный;

- используется наилучшая из известных упаковок равных кругов в единичный круг; в случае отсутствия таковой упаковка строится при помощи оптико-геометрического подхода [8, 9];

- выполняется обратная проекция и находится соответствующая упаковка на сферическом сегменте;

- выполняется процедура улучшения.

Таким образом, удается отказаться от использования процедуры мультистарта, что существенно ускоряет расчеты.

Проектирование сферического сегмента на плоскость. Зададим отображение сферического сегмента на плоскость

$$F : S(A, \theta) \longmapsto \Pi$$

следующим образом. Сначала спроецируем центр A сегмента в начало координат O на плоскости Π. Каждой точке $P(\varphi_0, \beta_0) \in S(A, \theta)$ с геодезическим расстоянием $\rho(A, P)$ и углом вращения φ_0 будет соответствовать одна и только одна точка $P^{'}(\alpha_0, \rho_0)$ на плоскости, где $\alpha_0 = \varphi_0$, $\rho_0 = \frac{\pi}{2} - \beta_0$. Заметим, что образом сферического сегмента при подобном проектировании будет круг S'.

Теорема. *Пусть точки B_1, C_1 принадлежат сферическому сегменту $S(A, \theta)$, причем $\rho(A, B_1) = \rho(A, C_1) = \rho$. Точки $B_2, C_2 \in \Pi$, причем $B_2 = F(B_1), C_2 = F(C_1)$. Тогда $\rho(B_1, C_1) < \|B_2 - C_2\|$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма.*

Из теоремы следует, что геодезическое расстояние между двумя точками на сегменте не превосходит расстояния между двумя их образами на плоскости. Это означает, что упаковка кругов в круг S' после обратного проектирования станет упаковкой геодезических кругов в сферический сегмент. Построенная упаковка, вообще говоря, не является оптимальной, однако имеет лучшие свойства по сравнению со случайно сгенерированной. Процесс улучшения выполняется методом бильярдного моделирования.

Проведены иллюстрирующие численные расчеты для углового размера $\theta = \frac{\pi}{6}$ и $\theta = \frac{\pi}{4}$. Сравнение с известными результатами [5] показывает, что предлагаемый метод позволяет находить оптимальные или близкие к ним упаковки за значительно меньшее время. В заключение отметим, что предложенный метод позволяет решать также задачи об упаковке геодезических кругов для сферического октанта, сферы без полюсов (сферической полосы) и других фигур на сфере.

Список литературы

[1] L. F. Toth. Arrangements in the Plane, on the Sphere, and in Space. Moscow: Fizmatlit, 1958, 364.

[2] V. K. Saulskiy. Multi satellite systems with linear structure and their application for continuous coverage of the earth. *Cosmic Research.*, **43**: 1 (2005), 34–51.

[3] S. C. Cohen, D. E. Smith. LAGEOS Scientific Results: Introduction. *J. Geophys. Res.*, **90** (1985), 9217–9220.

[4] H. S. Son, D. L. Marks, J. Hahn, J. Kim, D. J. Brady. Design of a spherical focal surface using close-packed relay optics. *Opt. Express,* **19:** 7 (2011), 16132–16138.

[5] P. Amore. Circle packing on spherical caps. *Physics of Fluids.*, **36:** 9 (2024), 97–113.

[6] The best known packings of equal circles in a circle. http://www.packomania.com/.

[7] П. Д. Лебедев, А. Л. Казаков. Итерационные методы построения упаковок из кругов различного диаметра на плоскости. *Тр. ИММ УрО РАН.*, **24:** 2 (2018), 141–151.

[8] А. Л. Казаков, А. А. Лемперт. Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике. *Автоматика и телемеханика*, **7** (2011), 50–57.

[9] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Том 3: Излучение. Волны. Кванты. М.: Либроком, 2013.

Об одном численном методе построения множеств достижимости систем при интегрально-квадратичных ограничениях на управление

Осипов И.О.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, Россия
i.o.osipov@imm.uran.ru

Построение множества достижимости управляемой динамической системы позволяет получить решение или хорошее начальное приближение для целого набора задач теории управления. Множества достижимости играют важную роль при исследовании математических моделей и могут быть вспомогательным объектом для поиска управлений с обратной связью. Существует множество методов построения оценок множеств достижимости. Отметим здесь ряд работ [1, 2], развивающих методы, основанные на заполнении множества достижимости набором точек, а также работы [3, 4], в которых используется случайный выбор управлений и обеспечивается асимптотическая сходимость к выпуклой оболочке истинных множеств достижимости. В докладе рассматривается численный метод построения множеств достижимости нелинейных управляемых систем при интегрально-квадратичных ограничениях на управление. Предлагаемый подход основывается на методе Монте-Карло с использованием случайного перебора управлений, разложенных по системе ортонормированных функций.

На интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$ рассмотрим нелинейную систему, аффинную по управлению

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ — управление, t_0, T — некоторые фиксированные положительные числа.

Функция $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ предполагается непрерывной по (t, x, u) и обладающими непрерывными производными по x на $[t_0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^r$, где Ω — некоторая область, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Всюду далее будем считать, что x_0 фиксирован и $x_0 \in \Omega$. Также будем предполагать, что существует такое $\overline{\mu} > 0$, что все решения (траектории) $x(t, u(\cdot))$ системы (1), отвечающие управлениям $u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2[t_0,T]}(0, \overline{\mu})$, определены на интервале $[t_0, T]$ и лежат в некотором выпуклом компакте $D \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Через $\mathbb{L}_2[t_0, T]$ здесь обозначено пространство интегрируемых с квадратом функций на интервале $[t_0, T]$. Под шаром $B_X(a, r)$ понимается замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке a в линейном пространстве X с нормой $\|\cdot\|_X$, $B_X(a, r) = \{x \in X : \|x - a\|_X \leqslant r\}$.

В дальнейшем, управление $u(\cdot)$ будем выбирать из шара $B_{\mathbb{L}_2[t_0,T]}(0, \mu)$, где $0 < \mu < \overline{\mu}$, т. е.

$$\int_{t_0}^{T} u^\top(t) u(t)\, dt \leqslant \mu^2. \tag{2}$$

Множеством достижимости $G(T, \mu)$ системы (1) в пространстве состояний в момент времени T назовем множество всех концов траекторий $x(T, u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$, которые могут быть порождены управлениями $u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu) = \big\{u : \|u(\cdot)\|^2_{\mathbb{L}_2} \leqslant \mu^2\big\}$,

$$G(T, \mu) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot) \in B_{\mathbb{L}_2}(0, \mu),\ x = x(T, u(\cdot))\}.$$

Как и в других численных методах построения множеств достижимости, основанных на алгоритме Монте-Карло, идея обсуждаемого метода состоит в случайном переборе достаточно большого набора управлений $u_i(\cdot) \in U \subset B_{\mathbb{L}_2[t_0,T]}(0, \mu)$, каждое из которых удовлетворяет ограничению (2). Для каждого управления производится интегрирование системы (1) и запоминается конечная точка полученной траектории $x_i(T, u_i(\cdot))$. По определению, все такие точки лежат в множестве достижимости $G(T, \mu)$.

Ключевым вопросом является конструирование множества управлений U. В случае геометрических ограничений, управления, которые ведут на границу, как правило, разрывны. Соответственно, для того, чтобы точнее построить границу множества достижимости, разумно строить множество перебираемых управлений именно из разрывных функций. В случае же интегральных ограничений, на границу ведут, как правило, непрерывные ограничения. В докладе предлагается заполнение этого множества управлениями вида

$$u_i(t) = C_i p(t), \tag{3}$$

где $p(t) = \big(p_0(t), p_1(t), \ldots, p_k(t)\big)$, $p : [t_0, T] \to \mathbb{R}^{k+1}$ — вектор-функция, состоящая из ортонормированных скалярных функций в пространстве $\mathbb{L}_2[t_0, T]$, а $C_i \in \mathbb{R}^{r\times k+1}$ — матрица коэффициентов.

Для того, чтобы такие управления, разложенные по системе ортонормированных функций, удовлетворяли ограничению (2) оказывается достаточно, чтобы $\|C_i\| \leqslant \mu$, где $\|\cdot\|$ — фробениусова норма матрицы.

Ниже приведен псевдокод алгоритма построения множества достижимости системы (1) с ограничениями (2).

---

parameters: Number of samples N, Degree of polynomial k
data **:** Control resource μ, Initial condition x_0, t_0, T
output **:** $\{x_i\}_{i=1}^N$
$p(t) \leftarrow$ Orthonormal polynomials in $\mathbb{L}_2[t, T]$;
for $i \leftarrow 0$ **to** N **do**
  $C \leftarrow$ Random matrix from $B_{\mathbb{R}^{r\times k+1}}(0, \mu)$;
  $u(t) \leftarrow Cp(t)$;
  $x_i \leftarrow$ `Propagate` $\big(x_0, u(t), t_0, T\big)$;

Полученное с помощью описанного алгоритма множество концов траекторий $\{x_i\}_{i=1}^N$ при достаточно большом N дает представление о форме и размерах множества достижимости и его проекций. Итерации алгоритма не зависимы друг от друга, что позволяет вычислять концы траекторий x_i параллельно. Это, в свою очередь, позволяет увеличивать N, сохраняя время работы алгоритма в разумных пределах.

В докладе приведены примеры построения множеств достижимости линейных и нелинейных систем, иллюстрирующие некоторые особенности алгоритма. Также приведена зависимость времени работы алгоритма от числа точек N.

Список литературы

[1] А. Ю. Горнов, Е. А. Финкельштейн. Алгоритм кусочно-линейной аппроксимации границы множества достижимости. *Автомат. и телемех.*, **3** (2015), 22–31.

[2] Е. А. Финкельштейн, А. Ю. Горнов. Алгоритм квазиравномерного заполнения множества достижимости нелинейной управляемой системы. *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*, **19** (2017), 217–223.

[3] T. Lew, M. Pavone. Sampling-based Reachability Analysis: A Random Set Theory Approach with Adversarial Sampling. *4th Conference on Robot Learning (CoRL 2020), Cambridge MA, USA.* https://arxiv.org/abs/2008.10180

[4] T. Lew, L. Janson, R. Bonalli, M. Pavone. A Simple and Efficient Sampling-based Algorithm for General Reachability Analysis. *Proceedings of The 4th Annual Learning for Dynamics and Control Conference in Proceedings of Machine Learning Research.* 2022 **168**, 1086-1099.

[5] И. В. Зыков, И. О. Осипов. Программа для построения методом Монте-Карло множеств достижимости нелинейных систем с интегральными ограничениями на управление. Сертификат государственной регистрации компьютерной программы или базы данных, 2020. No. 2020661557.

Обобщенные решения задачи Дирихле для уравнения эйконала в неограниченной области

Субботина Н.Н.
Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, Россия
e-mail@imm.uran.ru

Шемякин Д.В.
Уральский федеральный университет,
Екатеринбург, Россия
zbhegvsnz@gmail.com

Рассмотрено следующие уравнение эйконала:

$$\left(\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)^2=1,\quad (x_1,x_2)=x\in\Omega \tag{1.1}$$

где $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^2|\phi(x_1,x_2)>0\}$

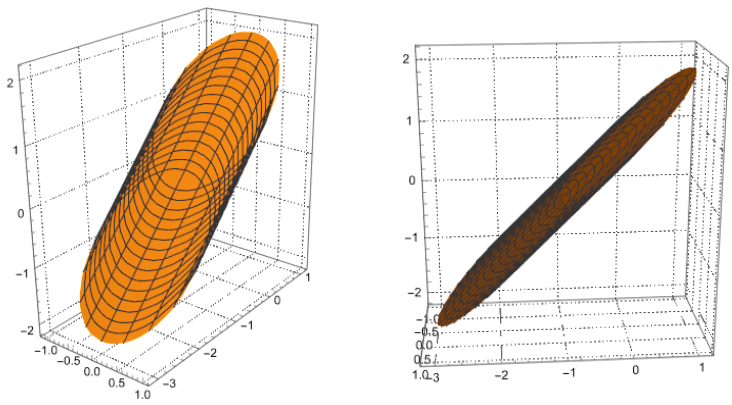
Известно значение искомой функции на $\partial\Omega=\{x\in\mathbb{R}^2|\phi(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-1=0\}$:

$$u(x_1,x_2)=u_0(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in\partial\Omega \tag{1.2}$$

Рассмотрены энтропийные решения по Кружкову[2] и минимаксные решения по Субботину[1].
Рассмотрены случаи, когда $u_0(x_1,x_2)=1$ и $u_0(x_1,x_2)=x_2+1$
Показано,что единственное энтропийное решение имеет вид

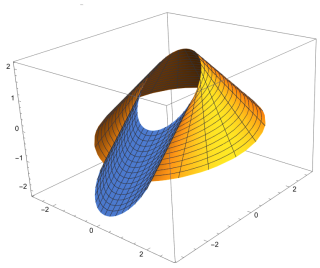
$$u_*(x)=\max_{w\in\partial\Omega}(1+w_2-||x-w||) \tag{1.3}$$

Для случая $u_0(x_1,x_2)=x_2+1$ построено два минимаксных решения этой задачи. Первое: $u_1(x_1,x_2)=x_2+1$, его график имеет вид:



1: Плоское решение:

График второго решения $u_2(x_1, x_2)$, построенного методом характеристик Коши, имеет вид:



2: Гладкое решение

Добавление условия на бесконечности

$$u(x) \to -\infty \quad \text{при} \quad |x| \to \infty,\ x \in \Omega, \tag{2.7б}$$

позволяет выделить единственное минимаксное решение $u_2(x)$, которое совпадает с энтропийным $u_*(x)$.

Таким образом, единственное энтропийное решение, определенное аналитически, можно построить конструктивно с помощью метода характеристик Коши.

Список литературы

[1] А. И. Субботин. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[2] С. Н. Кружков. Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала. I.Постановка задач,теоремы существования, единственности и устойчивости, некоторые свойства решений. **Матем. сб.**, **98(140)**: 3(11) (1975), 450–493.

Двумерное множество достижимости машины Дубинса при наличии геометрического и интегрального квадратичного ограничений на управление

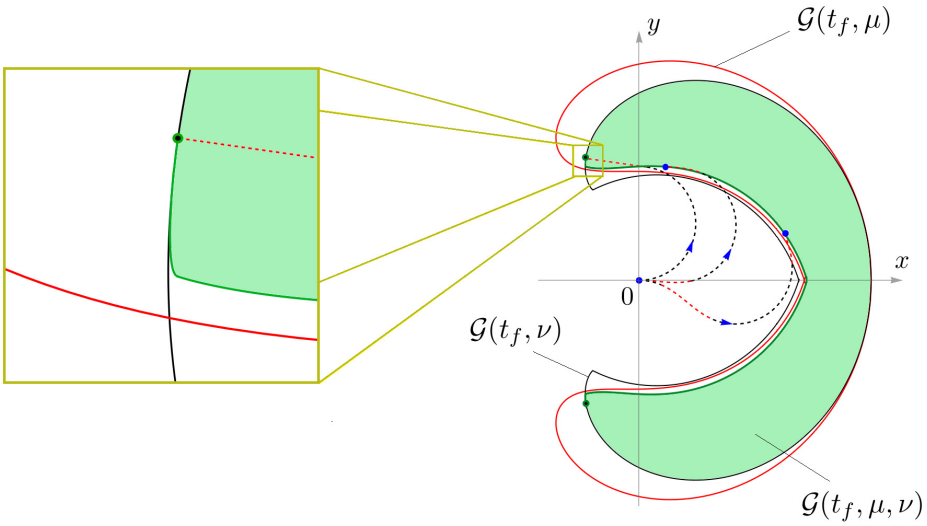
Трубников Г.И.
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
jora_it@mail.ru

Рассматривается алгоритм построения двумерного множества достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ машины Дубинса в плоскости геометрических координат x, y. Кинематические уравнения : $\dot{x} = \cos\varphi$, $\dot{y} = \sin\varphi$, $\dot{\varphi} = u$. Программное управление $u(t), t \in [t_0, t_f]$, стеснено двойным ограничением. Геометрическое ограничение на мгновенные значения управления и интегральное квадратичное ограничение записываются в виде

$$|u(t)| \le \nu,\ t \in [t_0, t_f]; \qquad \int_{t_0}^{t_f} u^2(t)dt \le \mu.$$

При параметрическом задании кривых, составляющих границу множества достижимости, основную роль играет ряд теоретических соотношений, пояснению которых посвящён доклад. Используя эти соотношения, удаётся эффективно найти краевые условия сопряжённой системы принципа максимума Понтрягина для экстремальных движений, приходящих на границу. В наиболее сложном случае такие движения представляют собой склейку эластик Эйлера и дуг окружностей.

На рисунке в правой части изображено множество достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ при двойном ограничении (множество с тёмно-зелёной границей и светло-зелёной заливкой) для $t_f = 4, \nu = 1, \mu = 3$. Также показаны границы множеств достижимости $\mathcal{G}(t_f, \nu)$ и $\mathcal{G}(t_f, \mu)$ при действии только одного геометрического ограничения для $t_f = 4, \nu = 1$ (чёрная линия) и только одного интегрального для $t_f = 4, \mu = 3$ (красная линия). В левой части представлен увеличенный фрагмент рисунка, выделенный в жёлтый прямоугольник.



1: Множество достижимости $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$ и границы множеств $\mathcal{G}(t_f, \nu)$, $\mathcal{G}(t_f, \mu)$. Несколько экстремальных движений, ведущих на границу множества $\mathcal{G}(t_f, \mu, \nu)$, изображены пунктиром.

Список литературы

[1] Л. Эйлер. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. Гостехиздат, 1934.

[2] E. J. Cocayne, G. W. C. Hall. Plane Motion of a Particle Subject to Curvature Constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **13**: 1 (1975), 197–220.

[3] M. I. Gusev. Computing the reachable set boundary for an abstract control system: revisited. *Ural Mathematical Journal*, **9**: 2 (2023), 99–108.

[4] V. S. Patsko, G. I. Trubnikov, A. A. Fedotov. Numerical Study of a Three-Dimensional Reachable Set for a Dubins Car under an Integral Control Constraint // Communications in Optimization Theory, 2025 (принято к печати).

[5] Г. И. Трубников. Аналитика эллиптических функций при построении двумерного множества достижимости машины Дубинса с интегральным ограничением на управление. *Материалы международной конференции SCDG2024, посвящённой 100-летию Н.Н. Красовского*, Екатеринбург, 2024, 331–335.

$\mathcal{L}_2$-устойчивость телеоператорных систем с переменной задержкой по времени

Усова А.А.
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия
ausova@imm.uran.ru

В работе рассматривается телеоператорная система, в которой локальная подсистема (Σ_l: оператор + робот-мастер) связана с удаленной подсистемой (Σ_r: подчиненный робот + внешняя среда) посредством канала связи с переменными задержками по времени. Предполагается, что (A1) задержки $T(t)$ растут не быстрее времени, то есть $\dot{T}(t) < 1$; (A2) каждая из подсистем является QSR-диссипативной с функцией расхода $\omega_i(\xi_i) = \xi_i^\top [QSR]_i \xi_i$ ($i \in \{l, r\}$)[3], где $\xi_l = \begin{bmatrix}\mathbf{f}_l^\top & \begin{bmatrix}\mathbf{x}_l^\top & \dot{\mathbf{x}}_l^\top\end{bmatrix}\end{bmatrix}^\top$, $\xi_r = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_r^\top & \dot{\mathbf{x}}_r^\top\end{bmatrix} & \mathbf{f}_r^\top\end{bmatrix}^\top$ (см. Рис. 1), а вектора $\mathbf{f}_l \in \mathbb{R}^{m_l}$ и $\begin{bmatrix}\mathbf{x}_l^\top & \dot{\mathbf{x}}_l^\top\end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{p_l}$ определяют входной и выходной сигналы подсистемы Σ_l, вектора $\begin{bmatrix}\mathbf{x}_r^\top & \dot{\mathbf{x}}_r^\top\end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{m_r}$ и $\mathbf{f}_r \in \mathbb{R}^{p_r}$ — вход и выход удаленной подсистемы Σ_r, при этом для корректного взаимодействия размерности входов и выходов связаны равенствами $m_l = p_r$ и $m_r = p_l$; (A3) удовлетворяет условию выживаемости по Виллемсу[4].

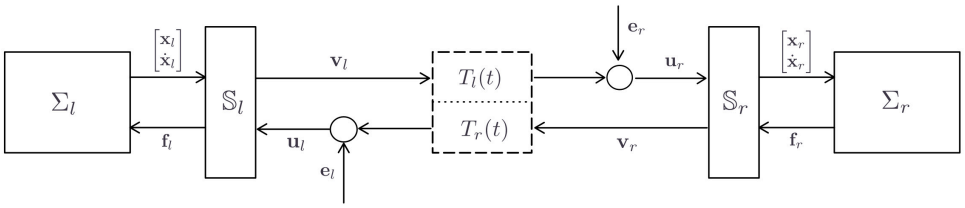


Рис. 1. Телеоператор. Преобразование рассеивания

Как известно, даже постоянные задержки по времени дестабилизируют удаленное взаимодействие подсистем. Однако в этом случае устойчивость обеспечивается внедрением в алгоритм управления преобразования рассеивания $\mathbb{S}_i$ на обоих концах канала связи, и система $\Sigma = (\Sigma_l, \Sigma_r)$ становится слабо $\mathcal{L}_2$-устойчивой относительно входа $\mathbf{e} = \begin{bmatrix}\mathbf{e}_l^\top & \mathbf{e}_r^\top\end{bmatrix}^\top$ и выхода $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_l^\top & \mathbf{v}_r^\top\end{bmatrix}^\top$, *m.e.* отвечает следующему определению.

Определение. Система Σ называется *слабо $\mathcal{L}_2$-устойчивой* относительно входа $\mathbf{e}$ и выхода $\mathbf{v}$, если существует неотрицательная функция запаса $V[t]$, удовлетворяющая неравенству $V[t] - V[t_0] \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \left(\mathbf{e}^\top(s) A \mathbf{e}(s) - \mathbf{v}^\top(s) B \mathbf{v}(s)\right) ds + \omega[t_0]$, где $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — положительно определенная матрица размерности $m = m_l + m_r$, $B \in \mathbb{R}^{p\times p}$—строго положительно определенная матрица размерности $p = p_l + p_r$. Значение $\omega[t_0]$ может зависеть от значений траекторий на временном промежутке $[t_0 - \max T_l, T_r, t_0]$, где T_l, T_r — наибольшее значение задержки по времени при передаче данных по каналам связи с локальной на удаленную сторону и наоборот соответственно.

Преобразование рассеивания $\mathbb{S}_i$ приводит квадратичную форму в функции расхода к каноническому виду, и, если требуется, масштабирует ее коэффициенты для того, чтобы выполнялось условие теоремы об $\mathcal{L}_2$-устойчивости [2]. Таким образом, преобразование рассеивания имеет структуру $\mathbb{S}_i = G_i \Gamma_i$, где G_i - матрица перехода (например, матрица, состоящая из собственных векторов-столбцов), приводящая квадратичную форму с матрицей $[QSR]_i$ к каноническому виду $\mathrm{diag}\{A_i, -B_i\}$ (диагональные матрицы $A_i \geqslant 0$ и $B_i > 0$ размерностей m_i и p_i соответственно), а $\Gamma_i = \mathrm{diag}\{\Gamma_{A_i}, \Gamma_{B_i}\}$ — строго положительно определенная диагональная матрица коэффициентов усиления (масштаба).

[3]Здесь и далее индекс i обозначает локальную l или удаленную подсистему r, т.е. $i \in \{l, r\}$.

[4]Размерность выходного сигнала совпадает с количеством строго отрицательных собственных значений QSR матрицы функции расхода системы

В ситуации с переменными задержками, преобразования рассеивания в представленной форме недостаточно. Примером тому служат телеоператорные системы с пассивными подсистемами (пассивные подсистемы — частный случай QSR-диссипативных систем, где QSR-матрица функции расхода имеет вид $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathcal{O} & \mathcal{I}\\ \mathcal{I} & \mathcal{O}\end{bmatrix}$). В работе [4] показано, что растущие задержки по времени приводят к непассивности телеоператорной системы за счет того, что канал связи начинает вести себя активным образом, «вбрасывая» энергию в систему. Поэтому, для стабилизации взаимодействия локальной Σ_l и удаленной Σ_r подсистем, предлагается включить в алгоритм управления на базе преобразования рассеивания дополнительные переменные коэффициенты усиления $\mathcal{R}_i(t) \in \mathbb{R}^{p_i\times p_i}$, цель которых нивелировать влияние переменных задержек по времени на устойчивость системы (см. Рис. 2).

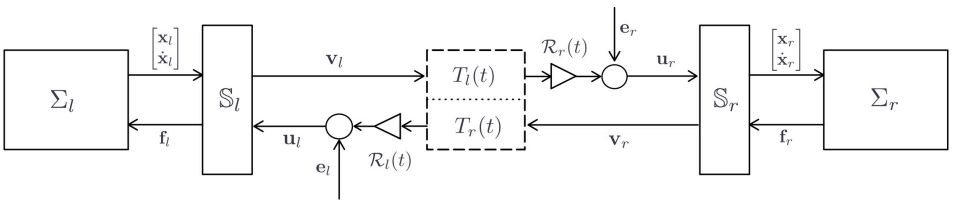


Рис. 2. Стабилизация телеоператорной системы с переменными задержками по времени

Коэффициенты $\mathcal{R}_i(t)$ являются диагональной матрицей с элементами $\rho_{i_j}(t) \in (0,1]$ $(j = 1,\dots,p_i)$ на диагонали, причем $\rho_{i_j}(t) \equiv 1$, если задержка i_j-ом в канале связи постоянна, то есть $T_{i_j}(t) \equiv \mathrm{Const}$.
Теорема *Телеоператорная система* $\Sigma = (\Sigma_l, \Sigma_r)$, *в которой взаимодействие подсистем подчиняется правилу*

$$\mathbf{u}_l(t) = \mathcal{R}_l(t)\mathbf{v}_r(t - T_r(t)) + \mathbf{e}_l(t), \quad \mathbf{u}_r(t) = \mathcal{R}_r(t)\mathbf{v}_l(t - T_l(t)) + \mathbf{e}_r(t), \tag{1}$$

где $\mathbf{e}_i(t)$ — *новый входной сигнал (напрмер, помеха), является слабо* $\mathcal{L}_2$*-устойчивой, если выполнены условия* (A1)–(A3) *и неравенства* (C1) $\sigma_{\max}(\mathbb{M}_\Sigma) < 1$, *где* $\mathbb{M}_\Sigma = \Gamma_A A^{1/2}\Pi B^{-1/2}\Gamma_B^{-1} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ $(p = p_r + p_l)$, *здесь* $\Gamma_B = \begin{bmatrix}\Gamma_{B_l} & \mathcal{O}_{p_l\times p_r}\\ \mathcal{O}_{p_r\times p_l} & \Gamma_{B_r}\end{bmatrix}$, $\Gamma_A = \begin{bmatrix}\Gamma_{A_l} & \mathcal{O}_{p_r\times p_l}\\ \mathcal{O}_{p_l\times p_r} & \Gamma_{A_r}\end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix}A_l & \mathcal{O}_{p_r\times p_l}\\ \mathcal{O}_{p_l\times p_r} & A_r\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}B_l & \mathcal{O}_{p_l\times p_r}\\ \mathcal{O}_{p_r\times p_l} & B_r\end{bmatrix}$ *и* $\Pi = \begin{bmatrix}\mathcal{O}_{p_r\times p_l} & \mathcal{I}_{p_r\times p_r}\\ \mathcal{I}_{p_l\times p_l} & \mathcal{O}_{p_l\times p_r}\end{bmatrix}$; (C2) $\rho_{i_j}^2(t) \leqslant 1 - \dot{T}_{i_j}(t)$, $(j = 1,\dots,p_i)$.
Доказательство. Выберем функцию запаса в виде суммы функций запаса $V[t] = V_l[t] + V_r[t]$ локальной и удаленной подсистем и оценим ее при помощи неравенств (C1) и (C2) $V[t] - V[t_0] \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \|\Gamma_{A_l}A_l^{1/2}\mathbf{u}_l(s)\|^2 - \|\Gamma_{B_l}B_l^{1/2}\mathbf{v}_l(s)\|^2 + \|\Gamma_{A_r}A_r^{1/2}\mathbf{u}_r(s)\|^2 - \|\Gamma_{B_r}B_r^{1/2}\mathbf{v}_r(s)\|^2 ds = J_{v_l} + J_{v_r} + J_e$. Условие (C1) означает, строгую положительную определенность матрицы $\mathcal{I}_{p\times p} - \mathbb{M}\mathbb{M}^\top > 0$. В виду того, что все матрицы, входящие в $\mathbb{M}$ блочно-диагональны, получим $\Gamma_B^2 B > \Pi^\top\Gamma_A^2 A\Pi$, значит, можно найти такое $\varepsilon > 0$, что $\Gamma_B^2 B > (1+\varepsilon)\Pi^\top\Gamma_A^2 A\Pi$. Поэлементно это неравенство можно записать в виде

$$\gamma_{B_{l_j}}^2 b_{l_j} > (1+\varepsilon)\gamma_{A_{r_j}}^2 a_{r_j}, (j = 1,\dots,p_l) \quad \text{и} \quad \gamma_{B_{r_j}}^2 b_{r_j} > (1+\varepsilon)\gamma_{A_{l_j}}^2 a_{l_j}, (j = 1,\dots,p_r) \tag{2}$$

Переходя к оценке выбранной функции запаса, применим правило соединения подсистем (1) и заменим входные волновые переменные согласно правилу. Далее воспользуемся неравенством Юнга и оценим каждый из интегралов. Напомню, что квадратичная форма стоящая под интегралом имеет канонический вид, поэтому в первом интеграле J_{v_l} рассмотрим отдельно каждое слагаемое и сделаем в них замену переменной $z = s - T_{l_j}(s)$ $(j = 1,\dots,p_l)$

$$J_{v_l}[t_0,t] = \sum_{j=1}^{p_l}\int\limits_{t_0}^{t}\Big((\varepsilon_1+1)\gamma_{A_{rj}}^2 a_{r_j}\rho_{r_j}^2(s)\mathbf{v}_{l_j}^2(s - T_{l_j}(s)) - \gamma_{B_{l_j}}^2 b_{l_j}\mathbf{v}_{l_j}^2(s)\Big)ds =$$

$$-\sum_{j=1}^{p_l}\left(\int\limits_{t-T_{l_j}(t)}^{t}\gamma^2_{B_{l_j}}b_{l_j}\mathbf{v}^2_{l_j}(z)dz+\int\limits_{t_0}^{t-T_{l_j}(t)}\left(\gamma^2_{B_{l_j}}b_{l_j}-(\varepsilon_1+1)\gamma^2_{A_{r_j}}a_{r_j}\frac{\rho^2_{r_j}(s(z))}{1-\dot{T}(s(z))}\right)\mathbf{v}^2_{l_j}(z)dz\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{p_l}\int\limits_{t_0-T_{l_j}(t_0)}^{t_0}\left((\varepsilon_1+1)\gamma^2_{A_{r_j}}a_{r_j}\frac{\rho^2_{r_j}(s(z))\mathbf{v}^2_{l_j}(z)}{1-\dot{T}(s(z))}+\right)dz=\sum_{j=1}^{p_l}\left(-J_j[t_0,t]-J^d_j[t_0,t]+\omega_{l_j}[t_0]\right)$$

Рассмотрим второе слагаемое под знаком первой суммы, используя условия (C1), (C2) и выбрав в качестве $\varepsilon_1=\varepsilon/2$ из неравенств (2),

$$J^d_j[t_0,t]\geqslant\int\limits_{t_0}^{t-T_{l_j}(t)}\left(\gamma^2_{B_{l_j}}b_{l_j}-(\varepsilon/2+1)\gamma^2_{A_{r_j}}a_{r_j}\right)\mathbf{v}^2_{l_j}(z)dz>\int\limits_{t_0}^{t-T_{l_j}(t)}\gamma^2_{B_{l_j}}b_{l_j}\left(1-\frac{(\varepsilon/2+1)}{\varepsilon+1}\right)\mathbf{v}^2_{l_j}(z)dz$$

Таким образом, обозначив сумму $\sum\limits_{j=1}^{p_l}\omega_{l_j}[t_0]$ как $\omega_l[t_0]$, получаем оценку

$$J_{v_l}[t_0,t]<-\sum_{j=1}^{p_l}\left(\int\limits_{t-T_{l_j}(t)}^{t}\gamma^2_{B_{l_j}}b_{l_j}\mathbf{v}^2_{l_j}(z)dz+\frac{\varepsilon/2}{\varepsilon+1}\int\limits_{t_0}^{t-T_{l_j}(t)}\gamma^2_{B_{l_j}}b_{l_j}\mathbf{v}^2_{l_j}(z)dz\right)+\omega_l[t_0]$$

$$<-\frac{\varepsilon/2}{\varepsilon+1}\sum_{j=1}^{p_l}\int\limits_{t_0}^{t}\gamma^2_{B_{l_j}}b_{l_j}\mathbf{v}^2_{l_j}(z)dz+\omega_l[t_0]=-\frac{\varepsilon/2}{\varepsilon+1}\int\limits_{t_0}^{t}\mathbf{v}_l^\top(z)\Gamma_{B_l}B_l\Gamma_{B_l}\mathbf{v}_l(z)dz+\omega_l[t_0].$$

Аналогично оценив $J_{v_r}[t_0,t]$, увидим $J_{v_r}[t_0,t]<-\dfrac{\varepsilon/2}{\varepsilon+1}\displaystyle\int\limits_{t_0}^{t}\mathbf{v}_r^\top(z)\Gamma_{B_r}B_r\Gamma_{B_r}\mathbf{v}_r(z)dz+\omega_r[t_0]$. Третий интеграл J_e можно оценить сверху выражением $\beta_e\displaystyle\int\limits_{t_0}^{t}\mathbf{e}^\top(s)\mathbf{A}\mathbf{e}(s)ds$, где $\beta_e=\dfrac{2}{\varepsilon}+1$ и $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\Gamma^2_{A_l}A_l & \mathcal{O}\\ \mathcal{O} & \Gamma^2_{A_r}A_r\end{bmatrix}$.

В итоге, для функции цены получена оценка, определяющая слабую $\mathcal{L}_2$-устойчивость системы Σ

$$V[t]-V[t_0]\leqslant\int\limits_{t_0}^{t}\left(-\frac{\varepsilon/2}{\varepsilon+1}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_l(s)\\ \mathbf{v}_r(s)\end{bmatrix}^\top\begin{bmatrix}\Gamma^2_{B_l}B_l & \mathcal{O}\\ \mathcal{O} & \Gamma^2_{B_r}B_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_l(s)\\ \mathbf{v}_r(s)\end{bmatrix}+\beta_e\mathbf{e}^\top(s)\mathbf{A}\mathbf{e}(s)\right)ds+\omega_l[t_0]+\omega_r[t_0].\quad\blacksquare$$

Замечание. Оценка $\dot{T}_i(t)$ не требуется знания $T_i(t)$. Для вычисления $\dot{T}_i(t)$ можно передать по каналу связи некую заранее определенную функцию $\sigma(t)$ (например такую, что $\dot{\sigma}_i(t)=1$), которая на противоположном конце канала связи будет иметь значение $\sigma(t-T_i(t))$. Используя ее, получим $\dot{T}_i(t)=1-\dot{\sigma}(t-T_i(t))$ (см. [5]).

Список литературы

[1] A. A. Usova, I. G. Polushin, R. V. Patel. Scattering-based stabilization of non-planar conic systems. *Automatica*, **93** (2018), 1–11.

[2] A. A. Usova, I. G. Polushin, R. V. Patel. Scattering-Based Stabilization of Complex Interconnections of (Q,S,R)-dissipative Systems with Time Delays. *IEEE Control Systems Letters*, **3**: 2 (2019), 368–373.

[3] I. G. Polushin. A Generalized Scattering Framework for Teleoperation with Communication Delays. *IFAC-PapersOnLine*, **53**: 2 (2020), 10064–10069.

[4] R. Lozano, N. Chopra, M. W. Spong. Passivation of force reflecting bilateral teleoperators with time varying delay. *In Proc. mechatronics conference*. Netherlands:Enstschede, 2002, 10.

[5] E. Nuño, L. Basañez, M. Prada. Asymptotic stability of teleoperators with variable time-delays. *In Proceedings-IEEE international conference on robotics and automation*. 2009, 4332–4337.

Простое групповое преследование с возможным нарушением в динамике

Фомина Е.С.
Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия
katefo631@gmail.com

При рассмотрении реальных динамических процессов возможны ситуации, при которых на управляемую систему воздействуют неконтролируемые помехи и, кроме того, у самой системы могут происходить сбои в работе. Поэтому вполне естественно рассматривать такие ситуации в рамках теории дифференциальных игр.

Одной из первых работ, посвященной задаче управления с возможным нарушением в динамке была работа М.С.Никольского [1]. Задача конфликтного взаимодействия двух лиц на конечном промежутке времени при условии, что у преследователя в любой, заранее неизвестный, момент времени может произойти отказ в работе управляющего устройства рассматривалась в работах [2,3]. В данной работе рассматривается задача о преследовании группой преследователей одного убегающего, при условии, что в любой момент времени у каждого из преследователей возможен отказ управляющих устройств. Получены достаточные условия разрешимости задачи преследования.

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n+1)$ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающий E, описываемая системой вида

$$\dot{z}_i = a_{\theta_i} u_i - v, \quad z_i(0) = z_i^0, \quad u_i \in U_i, \quad v \in V, \tag{1}$$

где $i \in I = \{1, \dots, n\}$, z_i, u_i, v, $z_i^0 \in \mathbb{R}^k$, U_i, V — выпуклые компакты $\mathbb{R}^k$. Функции a_{θ_i} имеют вид

$$a_{\theta_i}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [\theta_i, \theta_i + h_i], \\ 1, & t \notin [\theta_i, \theta_i + h_i]. \end{cases}$$

Данные моменты θ_i можно рассматривать как моменты отказа управляющих устройств у преследователей P_i. Величины $h_i \geqslant 0$ — время ремонта. Терминальные множества M_i — выпуклые компакты $\mathbb{R}^k$, причем $z_i^0 \notin M_i$ для всех $i \in I$.

Из определения функций a_{θ_i}, следует, что в процессе устранения поломки преследователи P_i не имеют возможности осуществлять поимку. Считается, что моменты θ_i, $i \in I$ неизвестны преследователям P_i, $i \in I$ и поломка может наступить в любой момент времени. Величины h_i, $i \in I$ известны всем участникам.

Предположение 1. *Для всех $i \in I$ $0 \in U_i \overset{*}{-} V \neq \varnothing$, где $A \overset{*}{-} B$ — разность множеств A и B по Минковскому.*

Предположение 2. *Для каждого $i \in I$ существует $t_i > 0$ для которого справедливо включение $Vh_i \subset (U_i \overset{*}{-} V)t_i$.*

Введем следующие обозначения.

$$\tau_i = \min\{t \geqslant 0 \mid Vh_i \subset (U_i \overset{*}{-} V)t\}, \quad \lambda(z_i^0, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid \lambda(M_i - z_i^0) \cap (U_i - v) \neq \varnothing\},$$

$$\delta = \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(z_i^0, v).$$

Определение 1. В игре $\Gamma(n+1)$ происходит поимка, если существуют $T_0 > 0$, квазистратегии $\mathcal{U}_i$, $i \in I$ преследователей P_i, $i \in I$, такие что для любого вектора $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $\theta_i + h_i + \tau_i \leqslant T_0$, любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдется номер $l \in I$ для которого $z_l(T_0) \in M_l$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения 1, 2, $\delta > 0$. Тогда в игре $\Gamma(n+1)$ происходит поимка.*

Предположение 3. $0 \in V$ *и для всех* $i \in I$ *множества* $M_i \overset{*}{-} (-h_i V) \neq \varnothing$. Введем обозначения. $M_i^1 = M_i \overset{*}{-} (-h_i V)$,

$$\lambda_1(z_i^0, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid \lambda(M_i^1 - z_i^0) \cap (U_i - v) \neq \varnothing\}$$

$$\delta_0 = \min_v \max_{i \in I} \lambda_1(z_i^0, v).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения 1, 3,* $\delta_0 > 0$. *Тогда в игре* $\Gamma(n+1)$ *происходит поимка.*

Список литературы

[1] М. С Никольский. Об одной задаче управления с нарушением в динамике. *Труды Института математики АН СССР*, **185** (1988), 181–185.

[2] М. С Никольский. Задача о переправе с возможной остановкой двигателя. *Дифференциальные уравнения.*, **29**: 11 (1993), 1937–1940.

[3] М. С Никольский, Дж. Пэн. Дифференциальная игра преследования с нарушением в динамике. *Дифференциальные уравнения.*, **30**: 11 (1994), 1923–1927.

Одна задача управления нелинейной системой вдоль траектории в условиях воздействия помехи[1]

Щелчков К.А.
Удмуртский Государственный Университет, Ижевск, Россия
incognitobox@mail.ru

Рассматривается задача управления вдоль заданной траектории с помехой, в качестве которой выступает второй игрок в дифференциальной игре. Дифференциальная игра $\Gamma(x_0)$ рассматривается в пространстве $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$. Динамика игры описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u, v), \quad u \in U, \quad v \in V, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^k$ — фазовый вектор, u и v — управляющие воздействия; $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, $u_i \in \mathbb{R}^l$, $i = 1, \ldots, m$. Множество $V \subset \mathbb{R}^s$ — компакт. Функция $f : \mathbb{R}^k \times U \times V \to \mathbb{R}^k$ — для каждого $u \in U$ непрерывна по совокупности переменных x, v и удовлетворяет по x условию Липшица с постоянной L, не зависящей от v.

Целью управления является движение сколь угодно близко к некоторой конечной траектории при любых действиях помехи. Преследователь использует кусочно-постоянную стратегию (кусочно-постоянное управление), для построения которой разрешается использовать только информацию о значении фазовых координат в точках разбиения временного интервала. Управление убегающего — измеримая функция, для построения которой нет ограничений по доступной информации. В [1] получены достаточные условия существования окрестности нуля, из каждой точки которой происходит ε-поимка, которая означает перевод системы в сколь угодно малую окрестность нуля за конечное время. Конструкция выигрышного управления в [1] используется для построения управления в настоящей работе. В настоящем исследовании рассматривается вспомогательная система

$$\dot{y} = w, \quad \|w\| \leqslant \rho, \quad y(0) = x_0, \tag{2}$$

где $w, y \in \mathbb{R}^k$. Допустимыми управлением данной системы считаем измеримые функции. Здесь $D_\rho(0)$ — замкнутый шар радиуса ρ с центром в нуле. Решение вспомогательной системы является траекторией, вдоль которой требуется осуществить движение.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть заданы $T > 0$, $\rho > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^k$ и допустимое управление $w : [0, T] \to D_\rho(0)$ системы (2). Если*

$$\min_{\xi \in S(y,T)} \left(\min_{p \in \mathbb{R}^k, \|p\|=1} \max_{u \in U} \min_{v \in V} \langle f(\xi, u, v), p \rangle \right) > \rho,$$

то для любого $\delta > 0$ существует кусочно-постоянная стратегия W преследователя P на промежутке $[0, T]$, такая что для любого допустимого управления убегающего $v(\cdot)$ выполнено неравенство $\|x(t) - y(t)\| < \delta$ для для всех $t \in [0, T]$, где $x(\cdot)$ — решение системы (1), $y(\cdot)$ — решение системы (2).

Список литературы

[1] K. A. Shchelchkov. On the Problem of Controlling a Nonlinear System by a Discrete Control under Disturbance. *Diff. Equat*, **60** (2024), 127–135.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01032.

Linear pursuit-evasion differential game for players with exponentially fluctuating speed

Soyibboev Ulmasjon
Namangan State University, Namangan, Uzbekistan
ulmasjonsoyibboev@gmail.com

Nuriddinova Fotima
Namangan State University, Namangan, Uzbekistan
be17ali04@gmail.com

Solijonova Rukhsora
Namangan State University, Namangan, Uzbekistan
ruxsorasolijonova123@gmail.com

We address a linear pursuit-evasion differential game with players, whose motions are governed by linear differential equations of matrix coefficients and whose control functions meet exponential geometric restrictions, in Euclidean space $\mathbb{R}^n$. For solving the pursuit game, the $\Pi-$*strategy* (known as the *parallel pursuit strategy* [4–7]) is constructed, and sufficient pursuit condition is obtained. For solving the evasion game, a directional control function is devised, and sufficient evasion condition is derived.

Assume that a player P (the pursuer) with a control u, $u \in \mathbb{R}^n$, follows another player E (the evader) with a control v, $v \in \mathbb{R}^n$. Write by x, $x \in \mathbb{R}^n$, the position of the pursuer and by y, $y \in \mathbb{R}^n$, that of the evader. Let their motions be respectively given as follows:

$$P: \ \dot{x} = Ax + u, \ x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$E: \ \dot{y} = Ay + v, \ y(0) = y_0, \tag{2}$$

where A is $n \times n$ real matrix, and x_0, y_0 are the players' initial positions and it is supposed that $x_0 \neq y_0$ at $t = 0$.

The control parameters u and v are considered as measurable functions $u(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ and $v(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ meeting the exponential inequalities

$$|u(t)| \leq \alpha a^{-kt} \text{ for almost every } t \geq 0, \tag{3}$$

$$|v(t)| \leq \beta a^{-kt} \text{ for almost every } t \geq 0 \tag{4}$$

appropriately, where $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $k > 0$, $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. According to the physical meaning, if $0 < a < 1$ ($a > 1$), then α and β mean the minimal (maximal) speed of players P and E. Denote by $\mathbb{U}_{exp}$ (by $\mathbb{V}_{exp}$) the family of all measurable functions $u(\cdot)$ ($v(\cdot)$) meeting (3) ((4)).

For $k = 0$, the differential game (1)–(4) was comprehensively investigated in [1–6].

If $u(\cdot) \in \mathbb{U}_{exp}$ and $v(\cdot) \in \mathbb{V}_{exp}$, then from (1) and (2) it follows the players' motion trajectories

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}u(s)ds, \ y(t) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}v(s)ds.$$

The target of player P is to capture player E, i.e. to realize the equality $x\big(T\big) = y\big(T\big)$ at a finite time T, $T > 0$. The aim of player E is to avoid from meeting player P, i.e. to hold the relation $x(t) \neq y(t)$ for any t, $t \geq 0$, or if this is not possible, then it struggles to delay the meeting time T as far as possible.

Definition 1. *For $\alpha \geq \beta$, we call the function*

$$\boldsymbol{u}(z_0, v, t) = v - \delta(z_0, v, t)\zeta_0(t) \tag{5}$$

the Π*-strategy of the pursuer, where* $\zeta_0(t) = \frac{e^{At}z_0}{\|e^{At}z_0\|}$, $z_0 = x_0 - y_0$,

$$\delta(z_0, v, t) = \langle v, \zeta_0(t)\rangle + \sqrt{\langle v, \zeta_0(t)\rangle^2 + \alpha^2 - |v|^2},$$

and $\langle v, \zeta_0(t)\rangle$ *implies the scalar product of the vectors* v *and* $\zeta_0(t)$ *in* $\mathbb{R}^n$, *and* $\|\cdot\|$ *means the Euclidean norm in* $\mathbb{R}^n$.

Theorem 1. *Let* $\alpha > \beta + |z_0|\big(\|A\| + k\ln a\big)$. *Then the pursuer, using* Π*-strategy (5), catches the evader on the time interval* $\big[0, T_P\big]$, *where* $T_P = \frac{1}{\|A\|+k\ln a}\ln\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta-|z_0|\big(\|A\|+k\ln a\big)}\right)$ *if* $a \neq e^{-\frac{\|A\|}{k}}$; $T_P = \frac{|z_0|}{\alpha-\beta}$ *if* $a = e^{-\frac{\|A\|}{k}}$.

In linear differential game (1)–(4), we call T_P a *guaranteed pursuit time.*

Definition 2. *The control function*

$$\mathbf{v}(t) = -\beta a^{-kt}\zeta_0(t) \tag{6}$$

is called the strategy of the evader.

Theorem 2. *Let* $\alpha \leq \beta + |z_0|\big(\|A\| + k\ln a\big)$. *Then the evader, using strategy (6), can escape from the pursuer in the time interval* $[0, +\infty)$.

References

[1] R. Isaacs. Differential Games. New York: John Wiley and Sons, 1965.

[2] N. N. Krasovskii. Game Problems of Contact of Motions. Moscow: Nauka, 1970.

[3] A. I. Subbotin. Generalization of the main equation of differential game theory. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **43**: 1 (1984), 103–133.

[4] L. A. Petrosjan. Differential Games of Pursuit. Series on Optimization 2. Singapore: World Scientific, 1993.

[5] A. Azamov. On the quality problem for simple pursuit games with constraint. *Serdica Bulgariacae math.*, **12**: 1 (1986), 38–43.

[6] A. A. Azamov, B. T. Samatov. The Π-Strategy: Analogies and Applications. *Contributions to Game Theory and Management*, **4** (2011), 33–46.

[7] B. T. Samatov, U. B. Soyibboev. Differential game with a lifeline for the inertial movements of players. *Ural Mathematical Journal*, **7**: 2 (2021), 94–109.

Стохастическая динамика (председатель д.ф.-м.н. Л.Б. Ряшко)

Мультистабильность и стохастическая динамика в моделях кальциевых осцилляций с белыми и цветными шумами[1]

Башкирцева И.А.
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Екатеринбург, Россия
Irina.Bashkirtseva@urfu.ru

Внутриклеточный кальций и его обмен в процессах межклеточного взаимодействия играет важную роль в информационных процессах взаимодействия живого организма с окружающей средой. Во многих клетках концентрация кальция может осциллировать. Математическое моделирование и исследование причин, лежащих в основе кальциевых осцилляций, является важной проблемой современной биофизики [1–3]. В настоящее время, наряду с детерминированными моделями кальциевых осцилляций, активно исследуются стохастические [4, 5].

На базе концептуальной детерминированной модели Ли-Ринцеля, описывающей динамику кальция с частотной модуляцией, проведено исследование стохастических эффектов в параметрических зонах би- и тристабильности, получено параметрическое описание возможных в этих зонах сценариев стохастических деформаций кальциевых осцилляций, связанных как с односторонними переходами между аттракторами, так и с переходами триггерного типа. Представлены результаты сравнительного анализа стохастической чувствительности сосуществующих равновесных и осцилляторных аттракторов и выявлены вероятностные механизмы переходов, вызываемых белыми шумами. Для расширенной модели Ли-Ринцеля кальциевой динамики с цветными шумами в зонах моно- и бистабильности получено параметрическое описание зависимости разброса случайных состояний от времени корреляции и интенсивности цветного шума. Локализованы резонансные зоны возбуждения цветным шумом колебаний больших амплитуд. Для анализа явления стохастического возбуждения разработана и применена техника стохастической чувствительности систем с цветными шумами и аппарат доверительных областей.

Список литературы

[1] K. Tsaneva-Atanasova. A mathematical study of calcium oscillations and waves. Saarbrucken: VDM Verlag, 2009.

[2] G. Dupont. Models of calcium signalling. New York: Springer Science, 2016.

[3] S. S. Shakhidzhanov, F. A. Balabin, S. I. Obydennyy, F. I. Ataullakhanov, A. N. Sveshnikova. Calcium oscillations in blood platelets and their possible role in interpreting extracellular information by cells. *Phys. Usp.*, **62**: 7 (2019), 660–674.

[4] I. Bashkirtseva, L. Ryashko. How noise can generate calcium spike-type oscillations in deterministic equilibrium modes. *Phys. Rev. E*, **105** (2022), 054404.

[5] L. Ryashko, I. Bashkirtseva. Noise-induced structural transformations of oscillatory modes in calcium dynamics. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **232** (2023), 1253–1259.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-11-00097).

Математическое моделирование и анализ стохастических явлений в метапопуляциях с миграцией[1]

Беляев А.В.
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
belyaev.alexander1337@yandex.ru

В последние годы область научных исследований, которая связана с моделированием и анализом популяционных систем, привлекает внимание многих исследователей как биологов, так и математиков. С математической точки зрения интерес к данным моделям обусловлен тем, что их необходимо описывать языком динамических систем. Здесь основная задача заключается в определении и описании бифуркаций и анализе возможных динамических режимов: регулярных и хаотических. Активно исследуются популяционные модели с дискретным временем, например, модель Рикера, Хасселя, Базыкина, Бевертона—Холта и другие. Даже простые виды нелинейности в дискретном случае могут стать причиной возникновения различных нетривиальных режимов динамики системы. Также различные феномены, наблюдаемые в многомерных непрерывных моделях, наблюдаются и в дискретных моделях меньшей размерности, что позволяет избавиться от сложности моделирования непрерывных систем.

Случайное воздействие присуще любой живой системе, следовательно, необходимо исследовать популяционные системы в присутствии случайных колебаний, которые могут сильно изменить динамику этих систем, породив качественно новые режимы. В текущей работе представлен обзор основных результатов исследования индуцированных шумом феноменов в трех дискретных популяционных моделях. Первая модель это двумерная модель хищник-жертва [1]. Вторая популяционная модель, которая представлена в докладе, это одномерная модель, задаваемая кусочно-гладким отображением [2]. Третья модель состоит из двух связанных подсистем с локальной динамикой, которая моделируется дискретным отображением Рикера [3]. С помощью метода функции стохастической чувствительности и доверительных областей изучены такие стохастические феномены, как временная стабилизации неустойчивого равновесия, разрушение синфазной и противофазной синхронизаций, переходы от порядка к хаосу и наоборот. Также для первых двух моделей найдены критерии вымирания популяций и описаны границы хаотических аттракторов.

Список литературы

[1] M. Zhao, Z. Xuan, C. Li. Dynamics of a discrete-time predator-prey system. *Advances in Difference Equations*, **2016**: 1 (2016).

[2] R. M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, **261** (1976), 459–467.

[3] E. W. Ricker. Stock and recruitment. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, **11**: 5 (1954), 559–623.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-11-00097).

Исследование стохастических переходов в системе связанных неидентичных нейронов[1]

Дунаев Я.Д.
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Екатеринбург, Россия
yakov-dunaev@mail.ru

Башкирцева И.А.
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Екатеринбург, Россия
irina.bashkirtseva@urfu.ru

В связанных нелинейных системах часто встречаются сценарии сложного динамического поведения [1]. Например, в случае систем нейронов, наиболее известными являются софазная и противофазная синхронизации, переключение между которыми может возникнуть под воздействием случайных возмущений. Ранее был рассмотрена система из двух одинаковых связанных нейронов, в которой наблюдался данный эффект [2].

В данной работе исследуется влияние рассогласования нейронов на их взаимодействие. Рассматривается система из двух неидентичных нейронов, связанных электрическим синапсом. Данная связь описывается с помощью системы из двух отображений Рулькова [3]

$$\begin{cases} x_{t+1} = \dfrac{4.1}{1+x_t^2} + \gamma + (\sigma + \xi_t)(y_t - x_t), \\ y_{t+1} = \dfrac{4.1}{1+y_t^2} + \gamma + \Delta + (\sigma + \xi_t)(x_t - y_t). \end{cases}$$

Здесь x_t, y_t – мембранный потенциал нейрона, γ – параметр ионного тока, σ – интенсивность связи, Δ – параметр рассогласования, ξ_i – гауссовский процесс.

Важной особенностью детерминированной модели является наличие зон мультистабильности с сосуществованием двух или трех осцилляторных аттракторов. В зонах мультистабильности выявлен эффект фрактального перемешивания бассейнов притяжения. Исследованы условия, при которых связанные нейроны переходят в режим софазной или противофазной синхронизации. Проведенный бифуркационный анализ по параметру интенсивности связи σ позволил выявить параметрические зоны регулярной и хаотической динамики. Исследованы эффекты, связанные с изменением параметра рассогласования нейронов Δ. Изучены стохастические переходы между сосуществующими осцилляторными режимами с использованием как методов прямого численного моделирования, так и с привлечением аналитического аппарата стохастической чувствительности и доверительных областей [4].

Список литературы

[1] S. Boccaletti, A. Pisarchik, C. Genio, A. Amann. Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks (2018).

[2] I. Bashkirtseva, L. Ryashko, A. Pisarchik. Stochastic transitions between in-phase and anti-phase synchronization in coupled map-based neural oscillators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **95** (2021), 105611.

[3] N. Rulkov. Regularization of synchronized chaotic bursts. *Phys. Rev. Lett.*, **86** (2001), 183–186.

[4] I. Bashkirtseva, L. Ryashko. Analysis of noise-induced chaos-order transitions in Rulkov model near crisis bifurcations. *Int. J. Bifurc. Chaos*, **27** (2017), 1730014.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №24-11-00097).

Тьюринговские структуры в моделях нелинейной динамики: математическое моделирование и стохастические феномены[1]

Колиниченко А. П.
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
kolinichenko.ale@gmail.com

Изучение сложных систем с нелинейной динамикой занимает важное место в современной науке. Примеры подобных систем часто можно обнаружить в областях химии и биологии. Нелинейная динамика становится причиной ряда феноменов, таких как мультистабильность, рождение предельных циклов, динамический хаос и самоорганизация.

В докладе рассматриваются процессы самоорганизации в пространственных моделях реакции-диффузии. Динамика подобных систем связана с феноменом диффузионной неустойчивости, которая проявляется в формировании устойчивых пространственно-неоднородных состояний (тьюринговских паттернов). В мультистабильных системах количество таких неоднородных структур может быть велико.

Показано, как под влиянием случайных возмущений система может совершать переход между сосуществующими структурами-аттракторами [1]. Такой феномен стохастического перехода между паттернами свидетельствует об их разной степени чувствительности к шумам. Определение структур наиболее устойчивых к случайным возмущениям – актуальная задача для исследования.

В данной работе рассмотрен ряд пространственно-распределенных математических моделей реакции-диффузии из разных областей науки [2, 3]. В каждой модели демонстрируется мультистабильность и разнообразие паттернов. Основное внимание уделяется исследованию стохастической динамики формирования тьюринговских структур и стохастических переходов. Чувствительность паттернов-аттракторов к шумам исследована с помощью мутода функций стохастической чувствительности. Эффективность данного метода и возможности его применения обсуждаются на примерах.

Список литературы

[1] I .Bashkirtseva, A. Kolinichenko, L. Ryashko. Stochastic sensitivity of Turing patterns: methods and applications to the analysis of noise-induced transitions. *Chaos, Solitons & Fractals*, **153**: 2 (2021), 111491.

[2] A. Kolinichenko. The effect of diffusion on multistability and stochastic sensitivity in spatially extended systems. *Cybernetics and Physics*, **13**: 2 (2024), 123–129.

[3] A. Kolinichenko, L. Ryashko. Self-Organization in Randomly Forced Diffusion Systems: A Stochastic Sensitivity Technique. *Mathematics*, **11**: 2 (2023), 451.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-11-00097

Дискретная эко-эпидемиологическая модель с лечением: аттракторы, бифуркации и мультистабильность[1]

Кузнецов С. И.
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Екатеринбург, Россия
s.i.kuznetsov@urfu.ru

Башкирцева И. А.
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Екатеринбург, Россия
irina.bashkirtseva@urfu.ru

Актуальная проблема анализа возможных эпидемиологических сценариев с помощью динамических моделей, учитывающих распространение инфекции и лечение, привлекает внимание не только биологов, но и математиков [1, 2]. В данной работе эта проблема изучается на базе дискретной двумерной модели, описывающей совместную динамику здоровых и инфицированных частей популяции. Эта модель использует отображение Рикера [3] и учитывает распространение инфекции вследствие контактов между инфицированными и здоровыми особями, смертность инфицированных особей и фактор лечения. Как показал бифуркационный анализ, эта модель демонстрирует широкий спектр динамических режимов и мультистабильность. Было показано, что система имеет три типа аттракторов, соответствующих различным биологически значимым режимам: полное вымирание, полное восстановление и нетривиальное сосуществование восприимчивых и инфицированных особей. Было показано, что небольшая вариация параметров может кардинально изменить геометрию бассейнов этих аттракторов. Установлено, что нетривиальный режим сосуществования может быть реализован в виде равновесия, дискретного цикла и квазипериодического аттрактора в форме замкнутой инвариантной кривой. В докладе представлены сценарии трансформации этих режимов при изменении скорости распространения инфекции и интенсивности лечения. Обсуждаются стохастические эффекты, вызванные случайными возмущениями.

Список литературы

[1] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, Z. Feng. Mathematical Models in Epidemiology. New York: Springer, 2019.

[2] G. Ledder. Mathematical Modeling for Epidemiology and Ecology. New York: Springer Cham, 2023.

[3] W. E. Ricker. Stock and recruitment. *J. Fish. Res. Board. Can.*, **11** (1954), 559–623.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №24-11-00097).

Анализ хаотического возбуждения нейронных осцилляций в дискретной модели Киалво[5]

Малютин Е.М.
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Екатеринбург, Россия
zhm404@gmail.com

Башкирцева И.А.
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Екатеринбург, Россия
irina.bashkirtseva@urfu.ru

В настоящее время математическое моделирование нейронной динамики является активным направлением исследований в области биофизики. В этих исследованиях используются модели, задаваемые как дифференциальными, так и разностными уравнениями [1,2]. Данная работа посвящена исследованию механизмов генерации возбудимых режимов нейронной активности в форме хаотических бёрстов на базе двумерной нейронной модели Киалво [3]. На основе бифуркационного анализа локализованы зоны параметров, где детерминированная модель демонстрирует жесткий переход из равновесного режима в режим большеамплитудных хаотических осцилляций. С помощью показателей Ляпунова построены карты режимов с областями регулярной и хаотической динамики. Проведен анализ деформации хаотических и периодических аттракторов при изменении интенсивности ионного тока, возбуждающего нейрон. Обнаружено и исследовано явление стохастической генерации хаотических бёрстов в параметрической зоне, где невозмущенная детерминированная модель демонстрирует лишь устойчивое равновесие как единственный аттрактор. Выявлена важная роль детерминированных хаотических транзиентов в процессах перевода нейронов малым шумом в режим бёрстового возбуждения.

Список литературы

[1] E. M. Izhikevich. Dynamical systems in neuroscience: The geometry of excitability and bursting. Cambridge: MIT Press, 2007.

[2] B. Ibarz, J. M. Casado, M. A. F. Sanjuan. Map-based models in neuronal dynamics. *Phys. Rep.*, **501** (2011), 1–74.

[3] D. R. Chialvo. Generic excitable dynamics on a two-dimensional map. *Chaos Solitons Fractals*, **5** (1995), 461–79.

[5]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №24-11-00097).

Анализ динамики мультиритмичной популяционной системы с конкуренцией за общие ресурсы[1]

Отман А.А.
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Екатеринбург, Россия
anna.otman@urfu.ru

Башкирцева И.А.
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Екатеринбург, Россия
irina.bashkirtseva@urfu.ru

В работе исследуется влияние конкуренции за общие ограниченные ресурсы в системе двух сосуществующих популяций. Рассматривается дискретная система, моделируемая отображением Рикера [1].
Проведен бифуркационный анализ режимов совместного поведения популяций в зависимости от параметров скорости роста и интенсивности конкуренции. Выявлены параметрические зоны мультиритмичной динамики с сосуществованием периодических, квазипериодических и хаотических аттракторов. Исследованы геометрические свойства бассейнов притяжения и формы синхронизации осцилляторной активности. Обсуждаются явления вызываемых шумом деформаций динамических режимов, связанные с разрушением процессов софазной и антифазной синхронизации.

Список литературы

[1] M. Kulakov, G. Neverova, E. Frisman. The Ricker Competition Model of Two Species: Dynamic Modes and Phase Multistability. *Mathematics* **10** (2022), 1076.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-11-00097).

Анализ колебательных режимов метапопуляционной системы с Олли эффектом в условиях случайных возмущений[1]

Павлецов М.М.
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», Екатеринбург, Россия
makar.pavletsov@urfu.ru

Ряшко Л.Б.
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», Екатеринбург, Россия
lev.ryashko@urfu.ru

В работе рассматривается стохастическая модель, состоящая из двух связанных популяций, каждая из которых моделируется дискретным отображением Рикера, впервые описанным в [1]. Двухмерная модель с учетом параметрического шума и Олли эффекта таким образом имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i^{\alpha} e^{(\mu+\varepsilon\xi_{1,t})(1-x_i)} + \sigma(y_i - x_i), \\ y_{i+1} = y_i^{\alpha} e^{(\mu+\varepsilon\xi_{2,t})(1-y_i)} - \sigma(y_i - x_i). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь x_i и y_i - плотности популяций, α - коэффициент воздействия Олли эффекта на популяции, μ - коэффициент скорости роста популяций, σ - коэффициент взаимных миграций между популяциями, $\xi_{i,t}$ - некоррелированные Гаусовские шумы с параметрами $E\xi_{i,t} = 0, E\xi_{i,t}^2 = 1$, ε - интенсивность шума.

Для детерминированного варианта модели были построены бифуркационные диаграммы по параметрам μ и σ, и выбраны наиболее интересные для изучения результаты. Локализованы зоны параметров, при которых наблюдается мультистабильность системы, изучены бассейны притяжения для зон сосуществования аттракторов. Описаны регулярные и хаотические осцилляционные режимы аттракторов системы. Продемонстрирована устойчивость аттракторов системы при помощи показателей Ляпунова.

Для стохастического варианта описано поведение аттракторов системы в зависимости от интенсивности вносимого параметрического шума ε. Исследованы индуцированные шумом переходы между аттракторами для случаев, когда наблюдается мультистабильность системы. Для анализа используется метод функции стохастической чувствительности [2], что позволяет точно описывать реакцию аттракторов на вносимый шум. Описан эффект вымирания популяций при критических значениях интенсивности шума ε. Получено параметрическое описание переходов между сосуществующими режимами, вызывающих разрушение синхронизации. Дана оценка вероятности индуцированного шумом вымирания.

Список литературы

[1] E. W. Ricker. Stock and recruitment. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, **11**: 5 (1954), 559–623.

[2] I. Bashkirtseva, L. Ryashko, I. Tsvetkov. Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for discrete dynamic systems. *Dyn. Contin., Discrete Impulsive Syst. Ser. A*, **17** (2010), 501–515.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-11-00097).

Количественный и статистический анализ пространственных структур в диффузионной модели гликолиза[1]

Панкратов А. А.
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Екатеринбург, Россия
alexandrpankratov9@gmail.com

Башкирцева И.А.
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Екатеринбург, Россия
irina.bashkirtseva@urfu.ru

В настоящее время вопросы самоорганизации привлекают внимание исследователей из самых различных областей естествознания. В докладе рассматривается задача количественной оценки сложных пространственных форм паттернов в диффузионных системах с двумя пространственными переменными. Данная задача изучается для пространственно-распределенного варианта модели гликолиза Хиггинса [1]. Для этой модели было показано, что в зоне неустойчивости Тьюринга [2] данная модель демонстрирует пространственные структуры со сложной геометрией. Паттерны-аттракторы, возникающие в результате самоорганизации, имеют в качестве компонентов пятна, полосы и их комбинации. В работе для машинной идентификации этих структур предложен конструктивный подход, позволяющий количественно оценить и различить эти сложные формы паттернов. На первом этапе проводится процедура бинаризации [3], в результате которой выявляются все структурные компоненты паттерна. Для каждой компоненты строится соответствующий граф и определяется его диаметр. Отметим, что диаметры графов для пятен значительно меньше, чем для полос. На втором этапе проводится статистический анализ распределения этих диаметров, что позволяет различать паттерны с разной геометрией. Эффективность данного подхода в идентификации и анализе пространственных структур продемонстрирована на примерах.

Список литературы

[1] J. Higgins. A chemical mechanism for oscillation of glycolytic intermediates in yeast cells. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **51**: 6 (1964), 989–994.

[2] A. M. Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. B. Biol. Sci.*, **237** (1952), 37–72.

[3] J. Sauvola, M. Pietikainen. Adaptive document image binarization. *Pattern Recognit.*, **33**: 2 (2000), 225–236.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №24-11-00097).

Анализ динамической модели эпидемии при условии социального дистанцирования

Simone Marsiglio
University of Pisa, Italy
simone.marsiglio@unipi.it

Tatyana Perevalova
University of Pisa, Italy
tatiana.perevalova@ec.unipi.it

В работе рассматривается динамическую модель, описывающую социально передаваемое заболевание с учетом соблюдения отдельной группой лиц социальной дистанции. Модель задается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} i_t' &= \alpha(1-x_t)i_t(1-i_t) - \delta[1+\tau(1-i_t)]i_t - \mu i_t(1-i_t) - bi_t + \varepsilon\xi_t(1-x_t)i_t(1-i_t) \\ x_t' &= \eta\left(h + Jx_t + Ki_t\right) - \theta x_t \end{aligned}$$

где i_t – инфицированная часть населения, x_t – часть населения соблюдающая дистанцию. Функция $\eta(z)$, описывающая принятие решения о соблюдении дистанции, имеет кусочно-гладкий вид, т.к.:

$$\eta(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z \le 0, \\ z & \text{if } 0 < z \le 1, \\ 1 & \text{if } z > 1. \end{cases}$$

В детерминированном случае ($\varepsilon = 0$) определяются параметрические условия для существования, устойчивости и актуальности равновесий этой модели. Показана роль наличия виртуальных равновесий в возникновении предельного цикла. Для выбранного бифуркационного параметра получены бифуркационная диаграмма и определены типы наблюдаемых предельных циклов. В стохастическом случае ($\varepsilon = 0$) находится стохастическая чувствительность равновесий и циклов модели, описываются стохастические феномены. Изучается влияние кусочно-гладкой структуры изучаемой модели на поведение стохастической модели.

Список литературы

[1] I. Bashkirtseva, R. Ryashko. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect. *Chaos*, **21** (2011), 047514.

[2] I. Belykh, R. Kuske, M. Porfiri, D. J. W. Simpson. Beyond the Bristol book: Advances and perspectives in non-smooth dynamics and applications. *Chaos*, **33**: 1 (2023), 010402.

Анализ влияния шума на формирование ранних постдеполяризаций в четырёхмерной модели Люо-Руди сердечного потенциала действия[1]

Слепухина Е.С.
Гогенгеймский университет, Штутгарт, Германия
Evdokiia.Slepukhina@uni-hohenheim.de

Ряшко Л.Б.
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», Екатеринбург, Россия
Lev.Ryashko@urfu.ru

Сердечные аритмии могут быть вызваны аномальной электрической активностью отдельных кардиомиоцитов. К таким нарушениям относятся ранние постдеполяризации (РПД). РПД проявляются в дополнительных деполяризациях (спайках) во время фаз плато и реполяризации потенциала действия. Такое патологическое поведение может быть связано с дисбалансом в ионной динамике клетки, а именно с избыточным открытием кальциевых каналов или блокированием калиевых каналов. РПД могут возникнуть вследсвие некоторых заболеваний, таких как гипокалиемия, а также побочных эффектов фармацевтических препаратов.

Динамические механизмы формирования РПД исследуются с помощью математических моделей потенциала действия сердца, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений. К таким моделям относится, например, система Люо-Руди и ее модификации [1, 2].

На базе четырёхмерной модели Люо-Руди сердечной активности проведён анализ вероятностного механизма стохастической генерации РПД в зоне колебаний с нормальным потенциалом действия и выявлены причины соответствующего качественного изменения динамики системы. В области осцилляций с РПД параметрически исследована вызванная шумом деформация колебаний, проявляющаяся в изменении количества спайков и периода. Исследованы феномены стохастического подавления РПД и генерации колебаний смешанных мод, в которых чередуются нормальные потенциалы действия и РПД. Эти явления исследованы с помощью прямого численного моделирования с последующей статистической обработкой результатов. Построены статистики межспайковых интервалов, периода и длительности активной фазы колебаний при изменении интенсивности шума. Получено параметрическое описание стохастической чувствительности аттракторов. Для прогнозирования явления генерации сложных осцилляторных режимов РПД разработан и применен аппарат доверительных областей.

Список литературы

[1] C.H. Luo, Y. Rudy. A model of the ventricular cardiac action potential. Depolarization, repolarization, and their interaction. *Circ. Res.*, **68** (1991), 1501–1526.

[2] D. X. Tran et al. Bifurcation and chaos in a model of cardiac early afterdepolarizations *Phys. Rev. Lett.*, **102** (2009), 258103.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-11-00097).

Машинное обучение
(председатель к.ф.-м.н. А.В. Коныгин)

Аппроксимация собственных чисел эрмитовых матриц методами машинного обучения[1]

Галина Е.М.
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
ekaterina.galina@urfu.ru

Соломеин А.В.
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
andrei.solomein@urfu.me

Улитко В.А.
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
vasiliy.ulitko@urfu.ru

Кошелев А.А.
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
Anton.Koshelev@urfu.ru

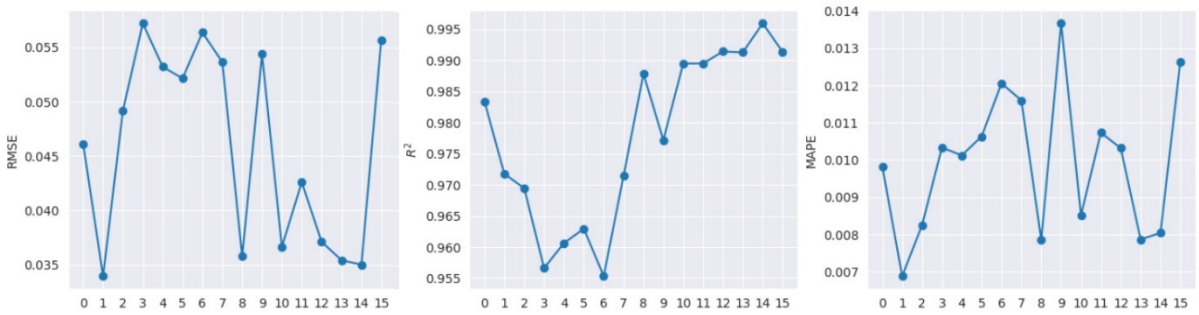
Классические алгоритмы нахождения собственных значений могут требовать значительных вычислительных ресурсов, особенно если требуется работа с матрицами в режиме реального времени. В частности, такая задача возникает в физике конденсированного состояния при моделировании квантового газа методом Монте-Карло. В работе рассматривается модель локальных бозонов на квадратной решетке [1]. В ходе моделирования нам необходимо диагонализировать эрмитовые матрицы, соответствующие состояниям кластеров из 4 узлов решетки.

В качестве альтернативного подхода мы рассматриваем нахождение собственных значений с помощью машинного обучения. Данные для обучения получены в ходе моделирования прямой диагонализацией матриц кластеров.

Мы протестировали различные реализации градиентного бустинга (XGBoost, LightGBM) и нейронную сеть. Сравнивая полученные модели, мы пришли к выводу, что более точный результат показывает нейронная сеть. Сейчас мы работаем с полносвязной нейронной сетью с тремя скрытыми слоями. На рис.1 представлен результат предсказания собственных значений эрмитовых матриц размерностью 16×16. Мы оцениваем результат для каждого собственного значения по трем метрикам качества – RMSE, R^2, MAPE.

Использование машинного обучения для задачи нахождения собственных значений матриц кажется нам перспективным направлением. Такой подход позволит нам ускорить вычисления. В будущем планируется оптимизация алгоритма и увеличение точности прогнозов.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-20147).



1: Графики метрик качества для 16 собственных значений.

Список литературы

[1] Е. Л. Спевак, Ю. Д. Панов, А. С. Москвин. Критические температуры модели локальных бозонов на квадратной решетке в приближении Бете. *Физика твердого тела*, **63**: 9 (2021), 1355–1360

Поиск оптимальной стратегии в симуляторе владельца продукта с помощью Deep RL

Крутовский Д.А.
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
krutovskiy.d@yandex.ru

Василько Е.А.
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
ekaterina.vasilko@mail.ru

Кошелев А.А.
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
Anton.Koshelev@urfu.ru

Обучение с подкреплением - это обучение тому, что надо делать, как следует отображать ситуацию в действия, чтобы максимизировать некоторый сигнал поощрения (вознаграждения), принимающий числовые значения [1].

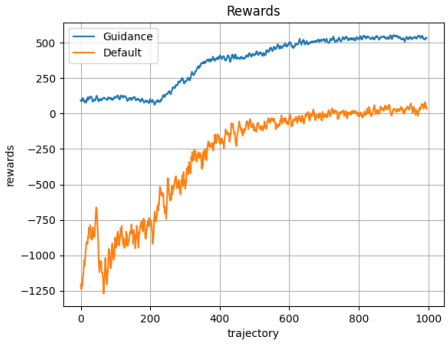
Product Owner Sim [2] предлагает вам управлять проектом с бюджетом 200 тысяч долларов и двумя роботами-разработчиками. Каждый разработчик тратит на задачи по 10 часов за спринт, но при условии, что они требуют оплаты в 10 тысяч долларов за работу. На доход проекта влияет количество пользователей и их лояльность. Для увеличения этих показателей нужно покупать исследования, декомпозировать их на задачи и выпускать новые функции. Вы должны использовать свои ресурсы оптимально для достижения цели в один миллион долларов. Главный показатель в игре – номер спринта, на котором была достигнута цель, чем меньше, тем лучше.

Результат исследования – стратегия, способная обыграть человека в игре-симуляторе владельца продукта.

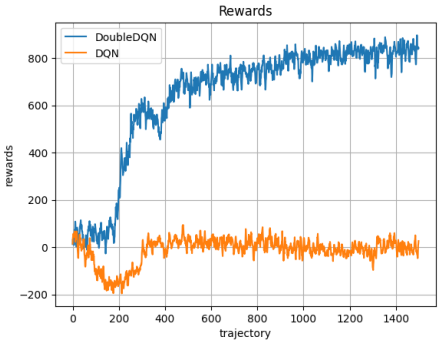
Для решения задачи игра была представлена в виде среды, поведение которой не зависит от предыдущих ее состояний. Проведен поиск системы наград, максимизация которой мотивирует агента получать высокие места в лидерборде игры. Было проведено усовершенствование алгоритма DQN [3] для отсечения недоступных действий в зависимости от состояния игры. Качественное сравнение алгоритмов приведено на Рисунке 1.

Проведен сравнительный анализ DQN и Double DQN [4]. Он показал, что на выбранной задаче DQN имеет низкую вероятность сойтись к выигрывающей стратегии. В свою очередь Double DQN сходится при каждом запуске, при этом результирующие стратегии имеют разную вероятность выиграть. На рисунке 2 изображены средние награды за траекторию, полученные агентами на пяти запусках.

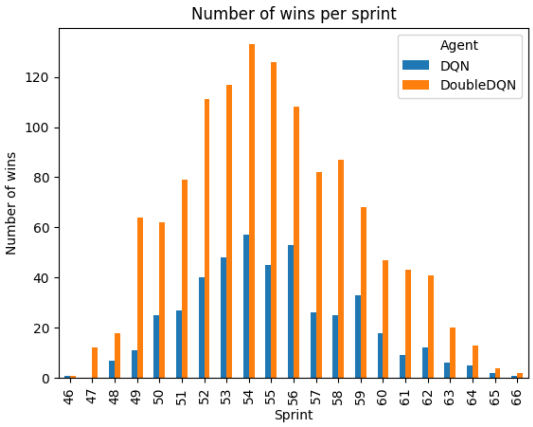
Для успешного превосходства над подготовленным человеком необходимо добиться победы менее, чем за 52 спринта. На приведенном на рисунке 3 графике представлено количество победных траекторий, завершающихся на каждом спринте. Из представленных данных можно сделать вывод, что агент достигает победы над человеком достаточно часто.



1: Награды агентов с отсечением и без



2: Сравнение наград DQN с DoubleDQN



3: Количество побед агента с конкретным спринтом

Список литературы

[1] Р. С. Саттон, Э. Г. Барто. Обучение с подкреплением. Адаптивные и интеллектуальные системы, 2014, 399.

[2] Игра Симулятор владельца продукта https://krutovsky-danya.itch.io/productownersimulator

[3] V. Mnih, K. Kavukcuoglu, D. Silver, A. Graves, I. Antonoglou, D. Wierstra, M. Riedmiller. Playing Atari with Deep Reinforcement Learning. arXiv:1312.5602

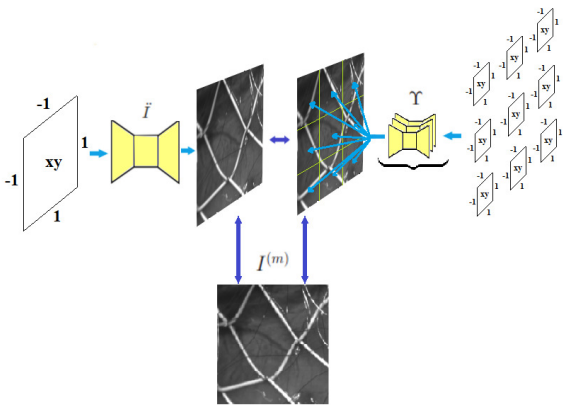
[4] H. van Hasselt, A. Guez, D. Silver. Deep Reinforcement Learning with Double Q-learning. https://arxiv.org/abs/1509.06461

DisplacentMLP+: неконтролируемая нейронная сеть для анализа динамических сцен

Мангилева Д.В.
Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург, Россия
daria.mangileva@urfu.ru

Марков Н.С.
Институт Иммунологии и Физиологии УрО РАН, Екатеринбург, Россия
Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург, Россия
ns.markov@iip.uran.ru

Многослойный персептрон (MLP) представляет собой одну из первых и наиболее известных моделей нейронных сетей, которая работает с произвольной сеткой координат на входе и выдает значения в виде тензора значений, соответствующих этим координатам. В последние годы большой интерес к MLP возродился из-за появления новых технологий, позволяющих преодолеть проблему его недообучения [1]. Одной из таких методик стало использование преобразований Фурье для входной координатной сетки [2]. Альтернативный способ предполагал замену стандартной функции активации ReLU на синусоидальную функцию в скрытых слоях MLP [3]. В частности, стали появляться исследования, включающие анализ динамических сцен с помощью MLP [4]. Данная модель состоит из двух MLP. Один выполняет функцию генератора изображений $\ddot{I}$, а второй — функцию генератора сетки $\ddot{G}$. Важно отметить, что измерение оптического потока с помощью таких схем возможно без предварительного обучения, что важно в некоторых технических и научно-исследовательских областях. В предыдущей работе автора было показано, что данная схема модели с оптимально подобранными параметрами работает лучше современных аналогов на изображениях, где изменение пикселей в пространстве происходит градиентно [5]. Следовательно, для улучшения качества работы нейронной сети на основе MLP был разработан метод обучения генератора изображений $\ddot{I}$ (Рис.1), суть которого заключается в следующем.
Если рассмотреть функцию, содержащую множество краткосрочных колебаний, то на небольшом интервале её график будет выглядеть более сглаженным по сравнению с фрагментом, взятым на более широком диапазоне. Таким образом, можно предположить, что генератор изображений $\ddot{I}$ способен генерировать отдельную часть кадра лучше, чем всё изображение.



4: Предложенная схема обучения генератора изображений $\ddot{I}$.

Пусть $F^{(m)}$ — изображение, которое необходимо сгенерировать, и $\widetilde{F} = \{F_1^{(m)}, \ldots, F_n^{(m)}\}$ — набор

сегментов изображения $F^{(m)}$. Генератор изображений $\ddot{I}$ приближается к эталону $F^{(m)}$ совместно с набором аналогичных моделей $\Upsilon = \{\ddot{I}_0, \ddot{I}_1, \ldots, \ddot{I}_n\}$, которые также стремятся сгенерировать соответствующее им значение в наборе $\widetilde{F}$. Предполагается, что модели Υ в совокупности должны обучаться лучше и быстрее чем $\ddot{I}$. Однако каждой модели из Υ на вход поступают сетки xy со значениями от -1 до 1. Для дальнейшего определения поля смещения необходимо, чтобы на входе и выходе у генератора сеток $\ddot{G}$ поступало единое поле xy со значениями от -1 до 1. Таким образом, было предложено обучать генератор $\ddot{I}$ совместно с набором Υ. Другими словами, Υ выдает значения $\widetilde{F'} = \{F_0'^{(m)}, F_1'^{(m)}, \ldots, F_n'^{(m)}\}$, совокупность которых стремится к эталону $F^{(m)}$ (1).

$$\left\| \widetilde{F'} - F^{(m)} \right\| \longrightarrow \min \tag{1}$$

Пусть F' — выход генератора $\ddot{I}$ и он сравнивается с $\widetilde{F'}$. Чтобы добиться близкой скорости обучения $\ddot{I}$ и $\widetilde{I}$, путем сравнения F' с $F^{(m)}$ (2). Это ведет к минимизации следующего выражения:

$$\left\| F' - \widetilde{F'} \right\| + \left\| F' - F^{(m)} \right\| \longrightarrow \min \tag{2}$$

Модель на основе MLP с применением данной схемы обучения генератора изображений была названа DisplacentMLP+. Она тестировалась на выборке из 485 кадров различных медико-биологических изображений, которые были искусственно деформированы. По результатам вычислений предложенный подход улучшает качество получаемых полей смещения по среднеквадратичной ошибке на 16% (0.051 против 0.061, t-критерий Уэлча $6.26 \cdot 10^{-14}$). Также стоит отметить, что предложенная модель работает на уровне современного аналога — единственной на сегодняшний день неконтролируемой нейронной сети DICNet-corr и её предобученной версией (критерий Уэлча 0.188 и 0.302 соответственно).

Данная модель использовалась в измерении полей смещения в видеоряде изображений открытого неизолированного сердца лабораторной свиньи, используемого для визуализации аритмогенных процессов в сердце. На искусственно деформированных кадрах данных записей (180 пар), DisplacentMLP+ продемонстрировала наилучшие результаты по сравнению с DICNet-corr по максимальному значению MSE в пространстве (для предобученной DICNet-corr результат лучше на 15% (0.420 против 0.495, Критерий Уэлча 0.014), для неконтролируемой версии на 98% (0.420 против 18.720, критерий Уэлча $1.44 \cdot 10^{-4}$).

В итоге, предложенный подход для анализа динамических сцен имеет перспективу для дальнейшего развития. Расчёты были выполнены на суперкомпьютере "Уран"ИММ УрО РАН. Выражается благодарность научному руководителю, профессору, доктору физико-математических наук Ольге Эдуардовне Соловьёвой.

Список литературы

[1] R. Basri et al. Frequency bias in neural networks for input of non-uniform density. *International conference on machine learning*. PMLR, 2020, 685–694.

[2] M. Tancik et al. Fourier features let networks learn high frequency functions in low dimensional domains. *Advances in neural information processing systems*, **33** (2020), 7537–7547.

[3] V. Sitzmann et al. Implicit neural representations with periodic activation functions. *Advances in neural information processing systems*, **33** (2020), 7462–7473.

[4] S. Nam, M. A. Brubaker, M. S. Brown. Neural image representations for multi-image fusion and layer separation. *European conference on computer vision*. Cham: Springer Nature Switzerland, 2022, 216–232.

[5] D. Mangileva. The Optimal MLP-based Model for Displacement Field Measurement in 2D Images and Its Application Perspective. *Proceedings of the 2024 2nd Asia Conference on Computer Vision, Image Processing and Pattern Recognition*. 2024, 1–8.

Влияние качества входных данных на восстановление видеоряда с событийной камеры

Нечаев Р. А.
Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург, Россия
romenkagg@gmail.com

Шека А. С.
Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
andrey.sheka@gmail.com

Событийная камера обладает рядом преимуществ по сравнению с традиционными камерами: высокий динамический диапозон, низкая задержка, асинхронный режим работы.

		Тип камеры	
Параметр сравнения	ед. измер.	Событийная	Классическая
Режим работы		асинхронный	синхронный
Задержка	с	$\sim 1 * 10^{-6}$	0,1
Динамический диапазон	Дб	140	60
Энергопотребление	Вт	$\sim 1 * 10^{-3}$	~ 1
Цена	$	> 5000	> 300
Пропускная способность	FPS	50000	120

Таблица 2: Сравнение камер различных типов

Типичные сценарии, в которых событийные камеры предлагают преимущества перед другими методами обнаружения, включают системы взаимодействия в реальном времени, такие как робототехника или носимая электроника [1], где важна работа в неконтролируемых условиях освещения, задержки и мощности. Однако, событийные камеры получают данные в виде асинхронных изменений яркости на пиксель, называемых “событиями”, вместо привычных полных кадров. Такие данные сложно визуализировать и применять во многих алгоритмах компьютерного зрения, заточенных под работу со стандартными кадрами. Соотвественно нужно решать задачу восстановления изображения.

Современные методы восстановления изображений основываются на использовании нейронных сетей, в частности, архитектуры сверточных нейронных сетей: U-Net, Res-Net. Их применение на больших объемах данных существенно улучшило и качество восстановленных изображений, и скорость их обработки.

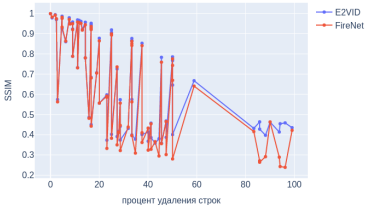
Событийные камеры, благодаря своим уникальным характеристикам, обеспечивают высокую пропускную способность для эффективной фиксации динамических сцен. Однако передача событийных данных по различным каналам связи сталкивается с проблемами нестабильности, включая помехи, ограниченную пропускную способность и возможные потери данных. Эти факторы могут значительно ухудшить качество передаваемой информации. Тем не менее, в существующих исследованиях по восстановлению изображений из событийных камер [2], [3] недостаточно внимания уделяется влиянию этих условий на качество восстановленных видеорядов. Важно изучить, как модели обработки изображений справляются с такими вызовами и насколько сильно итоговые результаты страдают в условиях нестабильной передачи данных.

В рамках исследования, изучено влияния потери данных от событийной камеры на качество восстановленного изображения с использованием нейронных сетей. Была разработана серия тестовых сценариев для анализа производительности популярных моделей нейронных сетей, применяемых для восстановления изображений. Для тестирования были использованы данные, полученные из реальных событий с событийных камер, а также синтетически сгенерированные данные с помощью симуляторов и генераторов.

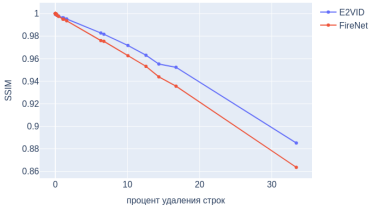
На рисунках 1, 2, 3 представлены графики с результатом в виде метрики SSIM [4] трех тестовых протоколов:

1. Блочное удаление данных с различным шагом
2. Построчное удаление данных с шагом M
3. Рандомное удаление данных

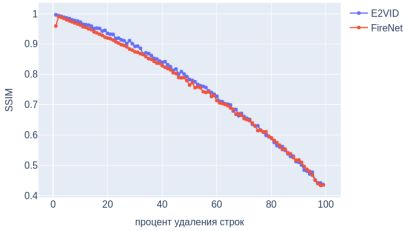
Установлено, что удаление больших блоков с событиями **критично** и значительно влияет на качество восстановленных изображений. При этом неблочные методы удаления: с шагом и случайным образом дают приблизительно одинаковые результаты, которые значительно менее уязвимы для качества восстановленных изображений. В целом, по результатам видна линейная зависимость между процентом удалённых строк и показателями метрик качества изображения. Эти результаты касаются всех тестовых протоколов, кроме случаев с удалением событий большими блоками.



1: Зависимость SSIM от процента удаленных строк для первого тестового протокола



2: Зависимость SSIM от процента удаленных строк для второго тестового протокола



3: Зависимость SSIM от процента удаленных строк для первого третьего протокола

Список литературы

[1] G. Gallego, T. Delbrück, G. Orchard, C. Bartolozzi, B. Taba, A. Censi, S. Leutenegger, A. J. Davison, J. Conradt, K. Daniilidis, D. Scaramuzza. Event-based Vision: A Survey. *CoRR*, abs/1904.08405, 2019.

[2] H. Rebecq, R. Ranftl, V. Koltun, D. Scaramuzza. High Speed and High Dynamic Range Video with an Event Camera. https://arxiv.org/abs/1906.07165

[3] C. Scheerlinck, H. Rebecq, D. Gehrig, et al. Fast Image Reconstruction with an Event Camera. *In IEEE Winter Conference on Applications of Computer Vision (WACV)*. 2020, pp. 156–163.

[4] J. Nilsson, T. Akenine-Möller. Understanding SSIM. https://arxiv.org/abs/2006.13846.

О методах оценки эффективности признаков для идентификации подводных объектов по отраженным от них гидроакустическим сигналам

Тугбаева А.С.
Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук,
Ижевск, Россия
anastasia_tugbaeva@mail.ru

Исследование гидросферы требует современных методов и средств для изучения подводной среды. В докладе представлены результаты исследования методов оценки эффективности признаков для идентификации подводных объектов по отраженным от них гидроакустическим сигналам. Под эффективностью признака понимается способность повышения качества распознавания объектов.

Для решения задачи были получены эхосигналы в опытовом бассейне УдмФИЦ УрО РАН[1] от семи различных подводных объектов: алюминиевые трубки диаметрами 10 мм., 15 мм., 20 мм. и 25 мм. и полипропиленовые трубки диаметрами 20 мм, 25 мм. и 32 мм. Был выполнен анализ отраженных сигналов методами периодограммного анализа с целью выявления в них скрытых закономерностей, позволяющих определить пространство признаков для распознавания подводных объектов [2]. В качестве алгоритмов идентификации использовались алгоритмы голосования и разделение объектов в евклидовом пространстве признаков. Результаты идентификации подводных объектов представлены в [3].

Основополагающим в любых задачах идентификации является выбор минимального набора признаков, позволяющего с достаточной точностью распознавать объекты исследования. В данной работе рассмотрены 5 алгоритмов, которые дают возможность определить наиболее эффективные признаки. Первый алгоритм определяет оценку эффективности признака исходя из отношения размаха значений признака одного класса к общему размаху значений признака по всем классам, и чем меньше ее значение, тем эффективнее признак. Второй алгоритм использует функцию существенности признака, основанную на зонном представлении признаков объектов, что позволяет упорядочить их по убыванию существенности [4].

Следующие варианты предполагают рассмотрение пересекающихся областей всех классов для каждого признака по отдельности. Один из этих алгоритмов основан на построении матрицы, состоящей из нулей и единиц, которые обозначают отсутствие и наличие пересекающейся области между парами классов по каждому признаку соответственно. Другие основаны на определении области пересечения значений признаков между всеми возможными парами классов.

Исследования демонстрируют возможность уменьшения числа малоэффективных признаков с сохранением вероятности распознавания объектов. Результаты работы позволяют сделать вывод, что предложенный подход является основой для оценки эффективности пространства признаков.

Список литературы

[1] В. А. Широков, В. Н. Милич. Экспериментальный комплекс для исследования возможностей использования гидроакустических датчиков в системе подводного видения. *Вестник ИжГТУ имени М.Т. Калашникова*, **24**: 4 (2021), 54–64.

[2] А. С. Тугбаева, А. Г. Ицков, В. Н. Милич, В. А. Широков. Идентификация подводных объектов по отраженным гидроакустическим сигналам. *Интеллектуальные системы в производстве*, **21**: 4 (2023), 31–41.

[3] А. С. Тугбаева, А. Г. Ицков. Исследование мер близости гидроакустиче5ских сигналов в пространстве признаков. *III Липановские чтения : материалы региональной школы-семинара молодых ученых, аспирантов и студентов.* Ижевск: Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова, 2024, 47–50.

[4] В. Н. Вагин, Е. Ю. Головина, А. А. Загорянская, М. В. Фомина. Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004, 704.

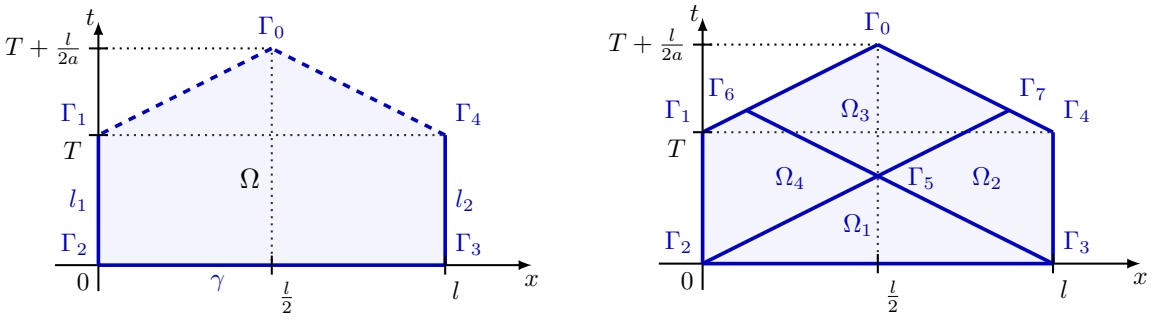
О функционале потерь для нейросетевой модели телеграфного уравнения [1]

Шорохов С.Г.
Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия
shorokhov-sg@rudn.ru

Телеграфное уравнение с частными производными описывает распространение волн различной природы в средах, обладающих сопротивлением. Рассмотрим построение вариационной формулировки для одномерного телеграфного уравнения

$$w_{tt} + k\,w_t = a^2 w_{xx} + b\,w,\ a > 0, k > 0, b < 0, (x,\,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

применяя теорию вариационных принципов для непотенциальных операторов [1]. Здесь и далее буквенные нижние индексы будут означать дифференцирование по соответствующей переменной. Рассматриваемая область Ω представляет собой пятиугольник с вершинами $\Gamma_0\left(\frac{l}{2}, T + \frac{l}{2a}\right)$, $\Gamma_1\,(0, T)$, $\Gamma_2\,(0, 0)$, $\Gamma_3\,(l, 0)$, $\Gamma_4\,(l, T)$, изображенный на рис. 1, (a), причем для удобства допустим, что $l > aT$.



(a) Область Ω (b) Разбиение Ω на подобласти

1: Область Ω и ее разбиение на подобласти $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$.

Граничные условия для уравнения (1) зададим в виде:

$$\begin{cases} w|_\gamma = \varphi\,(x)\,, \\ w_x|_\gamma = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\,(x)\,, \\ w_t|_\gamma = \psi\,(x)\,, \\ (c_0 w + c_1 w_t + c_2 w_x)|_{l_1} = \chi\,(t)\,, \\ w|_{l_2} = \omega\,(t)\,, \end{cases} \tag{2}$$

где $\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \psi, \chi, \omega\right) \in L_2\,(\gamma \times \gamma \times \gamma \times l_1 \times l_2)$. Краевая задача (1)-(2) рассматривается в классе обобщенных решений в смысле, приведенном в [2].

Перейдем от переменных x, t, w к переменным $\xi = x + a\,t$, $\eta = x - a\,t$, $u = w \exp\left(\frac{k}{2}\,t\right)$ и построим для краевой задачи вариационную формулировку, следуя подходу В.М. Филиппова [2].

Теорема. *Если параметры краевой задачи удовлетворяют условиям* $b = -\frac{1}{4}k^2$, $c_1 = c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы (проект № 002092-0-000).

$c_0 = k\frac{\sqrt{2}}{4}$, то вариационный функционал для краевой задачи (1)-(2) *может быть записан в виде*

$$\begin{aligned} D[w] = &\int\limits_{\Omega} w^2(x,t)\exp(k\,t)\,dxdt - 2\int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_4} \varphi(x+a\,t)\;w(x,t)\exp\left(\frac{k}{2}\,t\right)dxdt+ \\ &+\int\limits_{\Omega}\Theta(x,t)\;w(x,t)\exp\left(\frac{k}{2}\,t\right)dxdt+ \\ &+2\int\limits_{\Omega_3\cup\Omega_4}\Phi(x-a\,t)\;w(x,t)\exp\left(\frac{k}{2}\,t\right)dxdt- \\ &-2\int\limits_{\Omega_2\cup\Omega_3}\omega\left(\frac{1}{a}\,(x+a\,t-l)\right)w(x,t)\exp\left(\frac{k}{2a}\,(x+2a\,t-l)\right)dxdt \end{aligned} \tag{3}$$

где вспомогательные функции Φ, Ψ, Θ заданы равенствами

$$\Phi(\tau) = \int\limits_{\tau}^{0}\chi\left(-\frac{\mu}{a}\right)\exp\left(\frac{k\mu}{2a}\right)d\mu,\ \tau\in[-aT,0],$$

$$\Psi(\lambda) = \sqrt{2}\int\limits_{0}^{\lambda}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}(\mu) - \psi(\mu) - \frac{k}{2}\varphi(\mu)\right)d\mu,\ \lambda\in[0,\,l],$$

$$\Theta(x,t) = \begin{cases} \Psi(x+a\,t) - \Psi(x-a\,t), & (x,t)\in\Omega_1, \\ \Psi(2l-x-a\,t) - \Psi(x-a\,t), & (x,t)\in\Omega_2, \\ \Psi(2l-x-a\,t), & (x,t)\in\Omega_3, \\ \Psi(x+a\,t), & (x,t)\in\Omega_4, \end{cases}$$

а разбиение области Ω на подобласти $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ производится в соответствии с рис. 1, (b), в котором точки Γ_6, Γ_7 имеют координаты $\Gamma_6\left(\frac{1}{2}(l-aT), \frac{1}{2a}(l+aT)\right)$ и $\Gamma_7\left(\frac{1}{2}(l+aT), \frac{1}{2a}(l+aT)\right)$.

Построенный вариационный функционал (3) содержит интегралы по области Ω и ее подобластям и не содержит частных производных неизвестной функции $u(x,t)$. Поэтому искусственная нейронная сеть, аппроксимирующая решение краевой задачи (1)-(2) для телеграфного уравнения, может быть обучена с использованием вариационного функционала (3) в качестве функционала потерь [3]. Алгоритм обучения нейронной сети аналогичен алгоритму обучения нейронной сети для базового гиперболического уравнения, приведенному в [4].

Список литературы

[1] В. М. Филиппов, В. М. Савчин, С. Г. Шорохов. Вариационные принципы для непотенциальных операторов. *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.*, **40** (1992), 3–176.

[2] В. М. Филиппов. Вариационный метод решения краевых задач для волнового уравнения. *Дифференц. уравнения*, **20**: 11 (1984), 1961–1968.

[3] С. Г. Шорохов. Обучение нейронной сети для гиперболического уравнения при помощи квазиклассического функционала. *Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, **237** (2024), 76–86.

[4] S. G. Shorokhov. Improving Physics-Informed Neural Networks via Quasiclassical Loss Functionals. *Moscow University Physics Bulletin*, **79**: Suppl. 2 (2024), 920–927.

Численные методы решения дифференциальных уравнений (председатель д.ф.-м.н. В.Г. Пименов)

Выбор оптимального шага для гиперболического уравнения с запаздыванием

Власова А.М.
Уральский федеральный университет имени Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
a.m.vlasova@urfu.ru

Уравнение в частных производных гиперболического типа с запаздыванием имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x,u(t,x),u_t(x,\cdot)) : t_0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant L. \quad (1)$$

Заданы также граничные и функциональные начальные условия для (1). $u(x,t)$ - решение уравнения (1), $u_t(x,\cdot) = \{u(x,t+\kappa), -\tau \leqslant \kappa \leqslant 0\}$ - предыстория решения $u(x,t)$ на момент времени t. τ - запаздывание, $f(t,x,u(t,x),u_t(x,\cdot)$ - функционал, определенный на $[0,L] \times [t_0,T] \times R \times W$. $W = W[-\tau,0)$ - множество функций $u(\zeta)$, кусочно-непрерывных на $[-\tau,0)$ с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа, $||u(\cdot)||_W = sup_{\zeta\in[-\tau,0)}|u(\zeta)|$.

Для нахождения численного решения отрезок $[0,L]$ разбивается на части в шагом $h = \frac{L}{N}, N \in \mathbb{Z}$. Введем точки $x_i = ih, i \in [0,...,N]$. Для нахождения численного решения отрезок $[0,T]$ разбивается на части в шагом $h = \frac{T}{M}, M \in \mathbb{Z}$. Введем точки $t_j = j\Delta, j \in [0,...,M]$. $u_j^i = u(x_i,t_j)$ будем называть приближением точного решения уравнения (1). Рассмотрим семейство методов с весами s и кусочно-линейной интерполяцией:

$$\frac{u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i}{\Delta^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^{i-1} - 2u_{j+1}^i + u_{j+1}^{i+1}}{h^2} + sa^2 \frac{u_{j-1}^{i-1} - 2u_{j-1}^i + u_{j-1}^{i+1}}{h^2} + \\ +(1-2s)a^2 \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2} + f_j^i(u_j^i(\cdot)), \quad (2)$$

где $i \in [1,...,N-1], j \in [1,...,M-1]$. При $0 < s \leq 1$ для каждого временного слоя j схема с весами сводится к решениям линейных систем с диагональным преобладанием методом прогонки. Ранее было показано [1], что для точного решения задачи (1) погрешность данного метода при $0 \leq s \leq 1$ имеет порядок $h^2 + \Delta^2$, при условии, что существуют и непрерывны все частные производные до 4-го порядка включительно [1]. Численное решение (1) требует выбора оптимальных шагов Δ, h, чтобы $Norma = \max||u_1(x_i(h),t_i(\Delta)) - u_2(x_i(h),t_i(\Delta))|| \to 0$.

Для численного решения задачи (1) методом (2) разработана программа в Python, использующая библиотеки Matplotlib, NumPy, Axes3D.

В качестве тестового примера работы программы был выбран следующий:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\pi^2 exp(-t)\sin\pi x + exp(2-2t)\sin^2\pi x + u(x,t)(1-u(x,t-2)), \quad (3)$$

причем граничные условия $u(0,t) = u(l,t) = 0, 0 \leqslant t \leqslant 4$. Начальные условия $u(x,t) = exp(-t)\sin(\pi x)$, $-2 \leqslant t \leqslant 0, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Уравнение имеет точное решение $u(x,t) = exp(-t)\sin(\pi x)$. В таблице 1 приведены результаты расчетов за один проход алгоритма при $T = 4, s = 0.7, L = 1$. Для $Norma = \max||u(x_i,t_i) - u_j^i|| < 10^{-1}$ при $N \in [2,...,20], M = 20$.

h	Δ	h/Δ	$Norma$	N
0.053	0.21	0.25	0.094	20
0.055	0.21	0.26	0.094	19
0.059	0.21	0.28	0.093	18
0.062	0.21	0.30	0.093	17
0.067	0.21	0.32	0.092	16
0.071	0.21	0.34	0.093	15
0.077	0.21	0.36	0.091	14
0.083	0.21	0.40	0.091	13
0.091	0.21	0.43	0.089	12
0.1	0.21	0.48	0.090	11
0.11	0.21	0.53	0.088	10
0.125	0.21	0.59	0.088	9
0.143	0.21	0.68	0.085	8
0.167	0.21	0.79	0.085	7
0.2	0.21	0.95	0.088	6

Таблица 3: Результаты численных экспериментов для тестового примера (3)

$\forall N \in [6, 20]$ $\Delta = 0.21, h/\Delta \in [0.25, 0.95], Norma \in [0.085, 0.094]$. Причем $\min Norma$ достигается при $N = 120, h = 0.143, h/\Delta = 0.68$ и при $N = 7, h = 0.167, h/\Delta = 0.79$ (табл. 1).

В случае, когда $T = 4, s = 0.7, L = 1$, $M \in [2, ..., 60], N = 120$ $\min Norma = 0.092 < 10^{-1}$ достигается при $M = 21, h = 0.008, h/\Delta = 0.042$ и $\min Norma = 0.096 < 10^{-1}$ при $M = 20, h = 0.008, h/\Delta = 0.040$.

Вывод. Предложена программная реализация решения задачи (1) методом (2) с использованием языка Python, которая была успешно апробирована на тестовых примерах.

Список литературы

[1] В. Г. Пименов, Е. Е. Таширова. Асимптотическое разложение погрешности численного метода для решения волнового уравнения с функциональным запаздыванием. *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **62** (2023), 71–86.

Численные методы решения дифференциальных уравнений нейтрального типа

Ким А.В.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
avkim@imm.uran.ru

Щербаков С.В.
Уральский Государственный Аграрный университет, Екатеринбург, Россия
shcherbakov_sv@urgau.ru

Guang-Da Hu
Shahghai university Китай, Шанхай
ghu@hit.edu.cn

В первой части работы рассматриваются численные методы решения специальных одномерных функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа.

Во второй части работы обсуждаются два численных метода нахождения приближённых решений задачи Коши для НФДУ общего вида:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x_t(t+\tau), \dot{x}(t+\tau))$$

$$x(t_0) = x^0; \quad x(t+\cdot) = y^0(\cdot)$$

Заключительная (третья) часть работы посвящена обсуждению результатов компьютерного моделирования.

Список литературы

[1] А. В. Ким, В. Г. Пименов. *i*-Гладкий анализ и численных методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" , 2004.

[2] T. Mitsui, G. D. Hu. Numerical Analysis of Ordinary and Delay Differential Equations. Springer, 2023.

[3] G. D. Hu, T. Mitsui. Delay-dependent stability of numerical methods for delay differential systems of neutral type. *Bit Numer. Math.*, **57** (2017), 731–752.

[4] G. D. Hu. Computable stability criterion of linear neutral systems with unstable difference operators. *J. Comput. Appl. Math.*, **271** (2014), 223–232.

[5] А. В. Ким. О применении методологии *i*-гладкого анализа к разработке численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений. *Вестник российских университетов. Математика.*, **26**: 133 (2021), 26–34.

Применение программы SimInTech для решения системы интегральных уравнений

Макоев А.К.
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
jhono@bk.ru

Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений играют ключевую роль в современном инженерном моделировании, позволяя находить решения для сложных динамических систем, которые невозможно решить аналитически. Одной из таких платформ является отечественная программа SimInTech [1,2], предназначенная для решения широкого спектра математических задач, включая моделирование физических процессов, прогнозирование и оптимизацию параметров различных технических систем.

С применением SimInTech можно создавать модели с использованием визуальных блок-схем, что позволяет легко интегрировать различные типы моделей (включая линейные и нелинейные) и проводить многопараметрический анализ. Программа поддерживает гибкие методы численного решения, что позволяет решать как обычные, так и интегральные уравнения с переменными коэффициентами. Возможности SimInTech включают в себя как статический, так и динамический анализ, а также оптимизацию параметров моделей.

В данном докладе рассматривается использование программы SimInTech для численного решения системы интегральных уравнений на примере динамической системы «двигатель постоянного тока – солнечная батарея». Система имеет вид

$$x(t) = x(0) + a_1 \int_0^t [a_2 y(\tau) - x(\tau)]\, d\tau, \tag{1}$$

$$y(t) = y(0) + a_3 \int_0^t \left[\ln\left(\frac{a_4 - y(\tau)}{a_5} \right) - a_6 y(\tau) - a_7 x(\tau) \right] d\tau, \tag{2}$$

$$z(t) = z(0) + \int_0^t x(\tau) d\tau, \tag{3}$$

где $x(t)$ и $z(t)$ – скорость вращения и угол поворота ротора, $y(t)$ – потребляемый ток, a_k – параметры модели ($k = \overline{1,7}$).

Пример с системой интегральных уравнений (1) – (3) наглядно иллюстрирует возможности SimInTech в применении к реальным инженерным задачам, где требуется учитывать взаимодействие множества факторов и параметров системы.

Список литературы

[1] Л. М. Скворцов. SimInTech: Численное решение обыкновенных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений. М.: ДМК-Пресс, 2022.

[2] С. Г. Герман-Галкин, Б. А. Карташов, С. Н. Литвинов. Модельное проектирование электромеханических мехатронных модулей движения в среде SimInTech. М.: ДМК Пресс, 2021.

О задаче Рикье для бигармонического уравнения

Марковский А.Н.
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия
mark@kubsu.ru

Гамаюнова Д.Ю.
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия
dasha135@inbox.ru

1. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $S = \partial Q$ (например, с ляпуновской $S \in C^{1+\alpha}$). Обозначим

$$e_2(Q) = \left\{ E_{2,n}(x-y) \mid x \in Q, y \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{Q} \right\},$$

множество сдвигов фундаментального решения бигармонического уравнения в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ [1, стр. 520] и $G_2(Q)$ – замыкание линейной оболочки $\operatorname{span}\{e_2(Q)\}$ в норме $L_2(Q)$. Полученное пространство $G_2(Q)$ будем называть бигармоническим подпространством.

2. Рассмотрим разложение $L_2(Q) = G_1(Q) \oplus N_1(Q)$. Обозначим $\Delta : L_2(Q) \to N_1(Q)$ – соответствующее расширение оператора Лапласа, а $\Delta^{-1} : N_1(Q) \to L_2(Q)$ – соответственно обратный оператор.

Теорема 1. *Если $f \in G_2(Q)$, то существуют гармонические из $G_1(Q)$ функции g_0, g_1, такие что*

$$f = g_0 + \Delta^{-1} g_1, \tag{1}$$

и такое представление единственно.

В работе [2] получен частный случай разложения (1) для полианалитических функций в единичном круге. Представление (1) является глобальным представлением бигармонической функции в области Q в отличие от разложения Альманси [1, 3], которое, как известно, является локальным представлением. Более того, в отличие от разложения Альманси, разложение (1) является ортогональным.

3. Рассмотрим *задачу Рикье* в следующей постановке (классическую постановку см., например, в [3, стр. 30]): требуется найти бигармоническую функцию $u \in G_2(Q)$, такую что $\Delta u \in G_1(Q)$ и

$$\Delta u(x)\big|_S = f_1(x), \;\; u(x)\big|_S = f_0(x), \tag{3}$$

где $f_1, f_0 \in L_2(S)$.

Согласно теореме 1, решение представляется в виде

$$u = g_0 + \Delta^{-1} g_1. \tag{4}$$

Применим оператор Δ к выражению (4), получим $\Delta u = g_1$. Используя граничное условие (3) имеем:

$$g_1(x)\big|_S = f_1(x), \tag{5}$$

и, таким образом, g_1 определяется однозначно как решение краевой задачи для уравнения Лапласа с граничным условием (5). Аналогично, имеем граничное условие для функций g_0:

$$g_0(x)\big|_S = f_0(x) - \Delta^{-1} g_1(x)\big|_S. \tag{6}$$

Следовательно, гармонические функции g_0 и g_1 образующие решение (4) однозначно определяются решением граничных задач для уравнения Лапласа с условием Дирихле (6).

4. Таким образом, из теоремы 1, для задачи Рикье, вытекает существование и единственность не только классического решения с непрерывными на S данными, но и обобщенного решения из $G_2(Q)$. Обобщенная постановка для бигармонического случая рассматривалась, например, в [4, стр. 290, п. 27б].

Можно показать справедливость аналогичного результата для задач с более общими граничными условиями для итерированных лапласов; например, для задачи Рикье-Неймана, существование и единственность которой в классической постановке доказаны в [5].

Список литературы

[1] С. Л. Соболев. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974, 808.

[2] А. К. Рамазанов. Представление пространства полианалитических функций в виде прямой суммы ортогональных подпространств. Приложение к рациональным аппроксимациям. *Матем. заметки*, **66**: 5 (1999), 741–759.

[3] В. В. Карачик. Метод нормированных систем функций. Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2014, 451.

[4] В. П. Михайлов. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983, 424.

[5] В. В. Карачик. Задача Рикье-Неймана для полигармонического уравнения в шаре. *Дифференц. ур.*, **54**: 5 (2018), 653–662.

Линейно квадратичная стабилизация процесса сгорания топлива в Жидкостном ракетном двигателе

Щербаков С.В.
Уральский Государственный Аграрный университет, Екатеринбург, Россия
shcherbakov_sv@urgau.ru

Ким А.В.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия
avkim@imm.uran.ru

Рассматривается задача стабилизации сгорания топлива в Жидкостном Ракетном Двигателе, на основе анализа соответствующей математической модели [1].

Линеаризованный вариант модели системы питания и уравнений модели камеры сгорания имеет вид [1] (рассматривается нестационарный поток)

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}(t) &= (\gamma-1)\phi(t) - \gamma\phi(t-\delta) + \mu(t-\delta),\\
\dot{\mu}(t) &= \frac{1}{\xi J}\left[-\psi(t) + \frac{(P_0-P_1)}{2\Delta P}\right],\\
\dot{\mu}(t) &= \frac{1}{(1-\xi)J}[-\mu(t) + \psi(t) - P\phi(t)],\\
\dot{\psi}(t) &= \frac{1}{E}[\mu_1(t) - \mu(t)].
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь: $\dot{\phi}(t) = (\gamma-\delta)\gamma + \mu(t-\delta)$, $\phi(t)$ – частичное изменение давления в камере сгорания, t – единица времени, нормализованная временем пребывания газа θ_g, при стационарной работе, $\tilde{\tau}$ – значение запаздывания по времени при стационарной работе, $\tilde{p}$ – давление в камере сгорания при стационарной работе, $\tilde{\tau}\tilde{p}^{\gamma} = \text{const}$ для некоторого числа γ, $\delta = \frac{\tilde{\tau}}{\theta_g}$, $\mu(t)$ – частичное изменение впрыскивания и скорости горения, $\psi(t)$ – относительное изменение τ, p_1 – мгновенное давление в том месте питающей линии, где сосредоточена электрическая ёмкость, представляющая эластичность, ξ – частичная длина при постоянном источнике энергии, J – внутренний параметр линии, P – параметр перепада давления, $\mu_1(t)$ – частичное изменение потока массы направленной от емкости, Δp – перепад давления инжектора при стационарной работе, p_0 – регулируемое давление газа при постоянном источнике энергии, E – параметр эластичности линии. В качестве управления берется

$$u = \frac{(P_0-P_1)}{2\Delta P} \tag{2}$$

Процесс рассматривается при следующих значениях параметров [1]: $\gamma = 0.8$, $\xi = 0.5$, $\delta = 1$, $J = 2$, $P = 1$, $E = 1$. Тогда, вводя вектор $\mathbf{x}(t) = (\varphi(t), \mu_1(t), \mu(t), \psi(t))'$, система (1) в матричной форме имеет вид:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.8 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-1) + \begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{3}$$

Система (3) без управления $u(t) = 0$ неустойчива, так как имеет два корня с положительными действительными частями: $\lambda_{1,2} = 0.11255 \pm 1.52015i$.

Для систем с последействием Теория АКОР была разработана Н.Н. Красовским [2] и параметры соответствующего линейного управления с обратной связью удовлетворяют системе Обобщенных Уравнений Риккати [3], состоящей из: матричного алгебраического уравнения, матричного ОДУ, матричного уравнения с частными производными.

Теория явных решений ОУР, разработанная в [4], позволяет находить различные варианты явных решений ОУР [5] и строить соответствующие управления с обратной связью. В настоящей работе представлены алгоритмические и программные реализации 3 вариантов построения стабилизирующих управлений для процесса горения топлива в ЖРД на основе метода явных решений ОУР.

Список литературы

[1] L. Crocco. Aspects of combustion stability in liquid propellant rocket motors Part I: Fundamentals. Low frequency instability with monopropellants. *J.Amer.Rocket Soc.*, **21**: 6 (1951), 163–178.

[2] Н. Н. Красовский. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени. *Прикл. Матем. Механ.*, **26**: 1 (1962), 39–51.

[3] D. W. Ross, I. Flugge-Lotz. An Optimal Control Problem for Systems with Differential-difference Equation Dynamics. *SIAM J. Control.*, **7**: 4 (1969), 609–623.

[4] В. Х. Квон, А. В. Ким, В. М. Кормышев, В. Г. Пименов, С. И. Солодушкин. Аналитическое конструирование и синтез регуляторов в системах с последействием. Екатеринбург: УрФУ, 2010.

[5] D. W. Ross. Controller Design for Time Lag Systems via Quadratic Criterion. *IEEE Trans. Aut. Control.*, **16** (1971), 664–672.

Топология и геометрия
(председатель д.ф.-м.н. А.В. Осипов)

О максимизации целоудаленных множеств

Белозоров Н.Е.
ВГУ, Воронеж, Россия
belozorovn@mail.ru

Определение 1. *Целоудаленным множеством* на плоскости (IPS, Integral Point Set) называется множество точек M, не содержащееся ни в какой прямой, такое что расстояние между любыми двумя точками из M есть целое число.

Известно, что любое IPS конечно [1, 2].

Определение 2. *Мощностью множества* M называется количество элементов этого множества.

Определение 3. [3] IPS M называется *максимальным*, если для любой точки $A \notin M$, множество $M \cup \{A\}$ не является IPS. *Субмаксимальным* называется множество, являющееся подмножеством только одного максимального.

Определение 4. [5] IPS M называется *IPS полуобщего положения*, если никакие три точки из M не лежат на одной прямой. IPS M является *IPS общего положения*, если никакие три точки из M не лежат на одной прямой и никакие четыре точки из M не лежат на одной окружности.

В ходе работы нашей основной задачей была максимизация известных множеств, то есть нахождение для заданного IPS максимального IPS, содержащего данное множество.

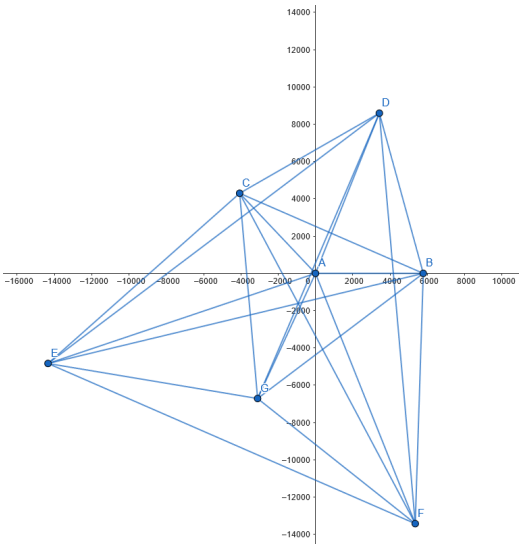
Результаты

- Написана программа [6] на языке JavaScript, которая для заданного множества M находит максимальные IPS, содержащие M. Если таких множеств не обнаружено, то исходное множество уже является максимальным.

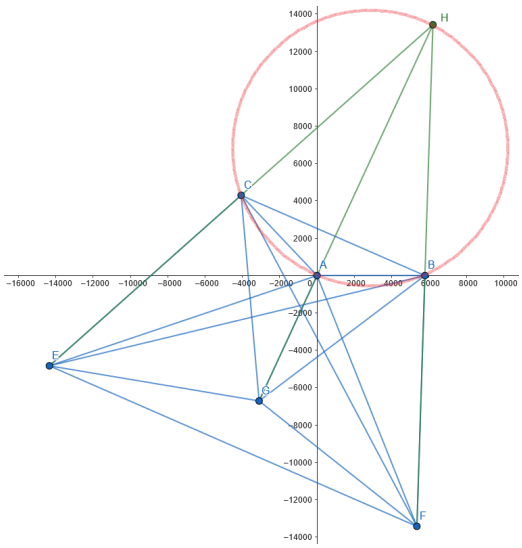
- В программу добавлена возможность проверки IPS на (полу)общность положения. Это позволяет решать задачу максимизации внутри класса.

- В программу добавлена функция, позволяющая находить новые IPS, полученные заменой одной точки в исходном множестве. Если новых IPS не найдено, это позволяет сделать вывод о субмаксимальности некоторых множеств.

- Были исследованы на максимальность два семиточечных множества общего положения из работы [5] (гептагоны Курца). Расчёты показали, что оба гептагона Курца являются максимальными множествами. В результате замены одной точки были найдены новые семиточечные множества, однако в этом случае терялась полуобщность.



Гептагон Курца



Гептагон Курца с заменой одной точки (1)

- Для поиска новых семиточечных множеств полуобщего положения было исследовано на максимальность 361 шеститочечное множества общего положения из работы [4]. Расчёты показали, что эти множества максимальны в своем классе, а все множества, для которых была найдена новая точка, являются субмаксимальными.

Список литературы

[1] N. H. Anning, P. Erdos. Integral distances. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51**: 8 (1945), 598–600.

[2] P. Erdos. Integral distances. 1945. TODO: journal!!

[3] A. R. Antonov, S. Kurz. Maximal integral point sets over Z2. *International Journal of Computer Mathematics*, bf 87: 12 (2010), 2653–2676.

[4] S. Kurz. Konstruktion und Eigenschaften ganzzahliger Punktmengen. Germany: Universitaet Bayreuth, 2005.

[5] T. Kreisel, S. Kurz. There are integral heptagons, no three points on a line, no four on a circle. *Discrete & Computational Geometry*, **39** (2008), 786–790.

[6] https://gitlab.com/mcFrene/maximizer/-/tree/maximizer

[7] Н. Н. Авдеев, Е. М. Семенов. Множества точек с целочисленными расстояниями на плоскости и в евклидовом пространстве. *Математический форум (Итоги науки. Юг России).*, **12** (2018), 217–236.

Моделирование оптимальных сетей в манхэттенском пространстве с помощью шарнирных механизмов

Житная М. Ю.
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия
g-ferra@mail.ru

Любое отображение $\Gamma = \Gamma_G \colon V \to \Omega$, где V — вершины простого конечного графа $G = (V, E)$, Ω — метрическое пространство, будем называть сетью в пространстве Ω, а граф G — *типом этой сети*. Отображения $\Gamma_v = \Gamma|_v$, $v \in V$ будем называть *вершинами сети* Γ, а $\Gamma_e = \Gamma|_e$, $e \in E$ — рёбрами сети Γ. Значение $|\Gamma_{uv}| = |\Gamma(u)\Gamma(v)|$ — *длина ребра* uv, сумма длин всех рёбер — *длина* $|\Gamma|$ *сети* Γ. Рёбра нулевой длины будем называть *вырожденными*, сети, не содержащие вырожденных рёбер, — *невырожденными сетями*.

Иногда во множестве вершин V мы будем выделять подмножество $W \subset V$, которое назовём *границей графа* G, его элементы $w \in W$ — *граничными вершинами*. Граф G с границей W будем обозначать G^W. Отображение $\Gamma_W = \Gamma|_W$ назовём *границей сети* Γ, вершины Γ_w, $w \in W$ — *граничные вершины сети* Γ, остальные вершины сети или графа — *внутренние*. Если для некоторого отображения φ выполнено $\Gamma|_W = \varphi$, то будем говорить, что Γ — *сеть с фиксированной границей* φ.

Отметим, что если пространство Ω, в которое отображается вершина v обозначить Ω_v, то сети можно отождествить с точками из декартова произведения $\prod\limits_{v \in V} \Omega_v = \Omega^n$. Если G — связный граф, то сети, имеющие тип G будем называть *связными*.

Пусть $M \subset \Omega$ — конечное множество. Будем говорить, что сеть Γ *соединяет* M, если сеть Γ связная и $M = \Gamma(W)$.

Пусть G — дерево, у которого все вершины степени 1 и 2 — граничные, и внутренние вершины степени больше двух. Множество всех сетей с точностью до изоморфизма, имеющих такие типы G с границей из $n \geqslant |M|$ вершин и граничным отображением, образ которого равен M, обозначим $T_n(M)$.

Положим $\operatorname{smt}_n(M) = \inf_{\Gamma \in T_n(M)} |\Gamma|$. Можно проверить, что значение $\operatorname{smt}_n(M)$ не зависит от n, поэтому любое из этих $\operatorname{smt}_n(M)$ будем обозначать $\operatorname{smt}(M)$. Если существует сеть Γ_0 такая, что $|\Gamma_0| = \operatorname{smt}(M)$, то будем называть сеть Γ_0 *минимальной сетью, соединяющей* M. Если $n = |M|$, то среди минимальных сетей, соединяющих M будут невырожденные, которые традиционно называются *минимальными деревьями Штейнера, соединяющими* M. Как показано в [3], если метрическое пространство ограниченно компактно (любое замкнутое ограниченное подмножество в нём компактно), то для любой границы существует минимальное дерево Штейнера, которое её соединяет.

Пусть Ω — метрическое пространство с прямоугольной системой координат и манхеттенской метрикой, в которой расстояния порождаются нормой $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. В таком пространстве минимальные сети и минимальные деревья Штейнера называются *прямоугольными*.

Пусть $G = (V, E)$ – граф, на множестве рёбер которого задана *весовая функция* $\ell \colon E \to [0, \infty)$. Набор $L = (G, \ell)$ будем называть *шарнирным механизмом*. Элементы множества V — *шарниры механизма* L, элементы множества E — *стержни*, значения функции $\ell(e)$, $e \in E$ — *длины стержней*.

Пусть $L = (G, \ell)$ — шарнирный механизм. Сеть x типа G в пространстве Ω будем называть *согласованной с* ℓ, если для любого ребра $uv \in E$ выполнено $|(x(u)x(v)| = \ell(uv)$. Каждую такую сеть будем называть *положением шарнирного механизма* L в пространстве Ω и говорить, что механизм L рассматриваем в пространстве Ω.

Ограничение $x|_A$ на набор шарниров $A \subset V$ будем называть *положением набора шарниров* A и обозначать через x_A.

Если множество A состоит из одного шарнира v, то положение $x_A = x_{\{v\}}$ будем обозначать через x_v. Множество всех положений шарнира v обозначим через X_v^L. Множество всех положений

механизма L обозначим через X^L, а множество всех положений набора A — через X^L_A.

Из сказанного выше вытекает, что множества положений X^L, X^L_A, X^L_v, можно рассматривать как подмножества соответствующих пространств $\Omega^n = \prod\limits_{v\in V} \Omega_v$, $\Omega^{|A|} = \prod\limits_{v\in A} \Omega_v$, $\Omega = \Omega_v$.

Для любого набора *шарниров* A механизма L будем говорить, что A *рисует* множество X^L_A.

Пусть V — множество шарниров некоторого механизма, на котором заданы подмножества $A, B \subset V$, а также задано некоторое положение $x_B \in X_B$ набора шарниров B. Множество $\{x|_A \colon x \in X, x|_B = x_B\}$ будем называть *множеством положений шарниров A при фиксированном положении x_B шарниров множества B* и обозначать через $X_A \dashv x_B = \{x_A \dashv x_B\}$.

Теорема. *Для любого натурального числа n существует рассматриваемый в $\mathbb{R}^3$, шарнирный механизм $L = L(n) = \big(G^W = (V, E)^W, \ell\big)$, $|W| = n$, обладающий следующими свойствами*:

1. *Механизм L содержит шарниры o, e_1, e_2, e_3, которые в каждом положении задают ортонормированную систему координат $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Далее положения (x^1, x^2, x^3) любых шарниров механизма L будем рассматривать в этой системе координат.*

2. *Шарниры множества W двигаются независимо друг от друга, и при фиксированном положении шарнира o каждый из них рисует круг $B_r(o)$ в плоскости $x^3 = \mathrm{const}$ с центром в o радиуса r.*

3. *Во множестве шарниров V выделены подмножества I_i не пересекающиеся с W. Обозначим $V_i = W \cup I_i$. Для каждого V_i задан граф $T^W_i = (V_i, E_i)^W$.*

4. *Для любого положения x_W шарниров W множество положений $X^L \dashv x_W$ механизма L состоит из одной точки x.*

5. *Для каждого i и любого положения x механизма L образы отображения x_{I_i} лежат в плоскости $x^3 = \mathrm{const}_i$.*

6. *Если для некоторого j положения шарниров I_j лежат в плоскости $x^3 = 0$, то сеть x_{V_j} типа T_j — минимальная прямоугольная сеть Штейнера с границей x_W.*

7. *Для любого положения x_W существует как минимум один набор I_k такой, что $x^3_{I_k} = 0$.*

8. *Если x_W — инъекция, то найдётся T_k, для которого x_{V_k} типа T_k — минимальное прямоугольное дерево Штейнера.*

Замечание. *Для наглядности в формулировке и доказательстве теоремы рассмотрен случай, когда граница W лежит в пространстве размерности два, но те же рассуждения можно провести аналогичным образом для пространства размерности $d > 2$.*

Список литературы

[1] М. Ю. Житная. Моделирование оптимальных сетей с использованием шарнирных механизмов. *Фундаментальная и прикладная математика*, **22**: 6 (2019), 95–122.

[2] М. Ю. Житная. Моделирование минимальных параметрических сетей в евклидовых пространствах с помощью шарнирных механизмов. *Чебышевский сборник*, **23**: 2 (2022), 74–87.

[3] А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Теория экстремальных сетей. Москва: Наука, 2001, 320.

[4] М. Ханан. О проблеме Штейнера с использованием манхэттенских расстояний. *Журнал прикладной математики SIAM*, **14** (1966), 255–265.

[5] А. А. Ошемков, Ф. Ю. Попеленский, А. А. Тужилин, А. Т. Фоменко, А. И. Шафаревич. Курс наглядной геометрии и топологии. Москва: УРСС, 2014, 360.

Относительно функционально счетные подмножества топологических пространств

Липин А.Е.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский Федеральный Университет, Екатеринбург, Россия
tony.lipin@yandex.ru

Определение. Подмножество A топологического пространства X называется относительно функционально счетным (RFC, relatively functionally countable), если для любой непрерывной функции $f : X \to \mathbb{R}$ множество $f[A]$ счетно.

Доклад посвящен следующему вопросу.

Вопрос 1 (А.В. Осипов). Обладает ли несчетным RFC подмножеством гильбертов куб $[0,1]^\omega$?

В 2016 году Осипов и А. Миллер доказали, что ответ отрицателен в предположении $\mathfrak{b} > \omega_1$ или $\mathrm{cov}(\mathrm{meager}) > \omega_1$, однако не стали публиковать эти результаты.

В 2019 году Т. Банах выложил вопрос 1 на mathoverflow.net, где пользователь fedja показал отрицательный ответ при $\neg CH$ [1].

Мы представляем следующие результаты.

Теорема. *Если в каждом из тихоновских пространств X_n все RFC подмножества счетные, то и в произведении $\prod_{n<\omega} X_n$ все RFC подмножества счетные.*

Следствие. *В метризуемом пространстве все RFC подмножества счетные.*

В частности, ответ на вопрос 1 отрицателен.

Список литературы

[1] URL: https://mathoverflow.net/questions/330255/on-projectively-countable-sets-in-the-hilbert-cube

О τ-гиперпространстве топологического пространства X

Манасыпова Р.З.
Ташкентский государственный университет имени Низами, Ташкент, Узбекистан
rezidabadrutdinova@gmail.com

Пусть X - топологическое T_1-пространство и τ - некоторое бесконечное кардинальное число.

Определение. [1] *Множество $F \subset X$ называется τ-замкнутым в X, если для каждого $B \subset F$ такого, что $|B| \leq \tau$, замыкание множества B в X лежит в F.*

Через $\tau - \exp X$ обозначим семейство всех τ-замкнутых подмножеств пространства X. Пусть $U_1, ..., U_n$ - открытые подмножества пространства X.

Теорема 1. *Семейство множеств вида*

$$O\langle U_1, ..., U_n\rangle = \{F : F \in \tau - \exp X,\ F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i,\ F \cap U_i \neq \varnothing,\ i = \overline{1.n}\}$$

образуют базу некоторой топологии на множестве $\tau - \exp X$.

Теорема 2. *Пусть X есть T_1-пространство и $X_0 \subset X$. Тогда множество $\{F : F \in \tau - \exp X,\ X_0 \subset F\}$ замкнуто в пространстве $\tau - \exp X$.*

Список литературы

[1] I.Juhasz. Cardinal functions in topology – ten years later. Amsterdam: Mathematical Center, 1980.

О связи одной структурной характеристики непрерывной функции с её аппроксимацией

Нохрин С. Э.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН Екатеринбург, Россия
varyag2@mail.ru

Шевалдин В. Т.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН Екатеринбург, Россия
Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Пусть $p_k(x) = \prod\limits_{j=1}^{m} \left(x^{\alpha_j} - 1\right)^{\beta_j} = \sum\limits_{s=0}^{k} \mu_s x^s$ $(\alpha_j, \beta_j \in \mathbf{N}, \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j\beta_j = k$, числа α_j считаем попарно различными) — алгебраический многочлен степени $k \in \mathbb{N}$, $f \in C_{2\pi}$,

$$\Delta_h^{p_k} f(x) = \sum_{s=0}^{k} \mu_s f(x + sh)$$

— конечная разность с шагом $h \neq 0$ функции f и

$$\omega_{p_k}(f, \delta) = \sup_{x,\, |h| \leq \delta} |\Delta_h^{p_k} f(x)| \qquad (\delta \geq 0)$$

— её модуль непрерывности, порождённый многочленом p_k.

Нами в пространстве $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций доказано неравенство типа Джексона-Стечкина вида

$$E_n(f)_{C_{2\pi}} \leq K\omega_{p_k}\left(f, 1/n\right),$$

где K — некоторая положительная константа, и

$$E_n(f)_{C_{2\pi}} = \inf_{\tau_n} \|f - \tau_n\|_{C_{2\pi}}$$

— наилучшее равномерное приближение функции $f \in C_{2\pi}$ пространством тригонометрических полиномов степени не выше n. В случае $p_k(x) = (x-1)^k$ данный результат получен С. Б. Стечкиным [1].

Список литературы

[1] С. Б. Стечкин. О порядке наилучших приближений непрерывных функций. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **15**: 3 (1951), 219–242.

О перечислении сильно симметричных многогранников

Субботин В.И.
ЮРГПУ(НПИ) имени М.И.Платова, Новочеркасск, Россия
ДонГАУ, Персияновский, Россия
geometry@mail.ru

Известны исследования, посвящённые полному перечислению замкнутых выпуклых правильногранников в трёхмерном евклидовом пространстве E^3, а также их обобщениям: многогранникам с условными рёбрами и паркетогранникам, см., например, [1], [2]. В связи с этим возникает вопрос о возможности полного перечисления класса замкнутых выпуклых многогранников в E^3 не только без условия правильности граней, но и без метрических ограничений на элементы многогранника. Таким классом оказывается, в частности, класс многогранников, сильно симметричных относительно вращения граней, для характеризации которого используются группы вращений в E^3.

Определение. *Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется сильно симметричным относительно вращения граней, если ось вращения каждой грани является осью симметрии всего многогранника.*

Заметим, что порядок оси вращения не обязательно совпадает с порядком оси вращения грани, рассматриваемой как фигура, отделённая от многогранника. Например, в усечённом тетраэдре (архимедовом многограннике) ось вращения, проходящая через центр правильной 6-угольной грани, является осью вращения третьего порядка.

В настоящем докладе предложен другой подход к доказательству основной теоремы из [3], основанный на введении понятия симметричного отсечения элементов многогранника. В связи с этим несколько изменяется формулировка основной теоремы из [3], которую можно представить следующим образом.

Теорема. *Все многогранники, сильно симметричные относительно вращения граней, могут быть получены путём (возможно неоднократного) симметричного отсечения вершин и рёбер правильных многогранников, а также симметричным отсечением рёбер правильных призм.*

Следствие. *Помимо правильных, одиннадцати архимедовых, полуархимедовых, то есть полученных симметричным отсечением из архимедовых, а также бесконечной серии прямых призм, полученных симметричным отсечением рёбер правильных призм, существуют только семь сильно симметричных многогранников, не являющихся даже комбинаторно эквивалентными ни правильным, ни архимедовым.*

Список литературы

[1] В. А. Залгаллер. Выпуклые многогранники с правильными гранями. *Записки научных семинаров ЛОМИ,* **2** (1967), 1–220.

[2] А. В. Тимофеенко. О выпуклых многогранниках с равноугольными и паркетными гранями. *Чебышевский сборник*, **12**: 2 (2011), 118–126.

[3] В. И. Субботин. Об одном классе сильно симметричных многогранников. *Чебышевский сборник*, **17**: 4 (2016), 132–140.

On the geometry of rotation of a heavy rigid body

Ergashova Sh.R.
National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
shohida.ergashova@mail.ru

Definition 1. Let M be a symplectic manifold and $H : M \to \mathbb{R}$ a smooth function. The *Hamiltonian vector field* associated with H is the unique smooth vector field $sgradH$ on M satisfying

$$sgradH(F) = \{F, H\} \tag{1}$$

for every smooth function $F : M \to \mathbb{R}$.

The equations governing the flow of $sgradH$ are referred to as *Hamilton's equations* for the *Hamiltonian function* H.

Definition 2. Let M^{2n} be a symplectic manifold and $sgradH$ Hamiltonian vector field with a smooth Hamiltonian function H.

Hamiltonian system $sgradH$ is called *completely integrable in the sense of Liouville*, if there exists a set of smooth functions $F_1, ..., F_n$ as

1) $F_1, ..., F_n$ are the first integrals of the $sgradH$ Hamiltonian vector field,

2) they are functionally independent in M, that is, almost everywhere on M their gradients are linearly independent.

3) $\{F_i, F_j\} = 0$ for any i and j,

4) the vector fields $sgradF_i$ are complete, that is, the natural parameter on their integral trajectories is defined on the whole number line [2].

Definition 3. The decomposition of the manifold M^{2n} into connected components of common level surfaces of the integrals $F_1, ..., F_n$ is called the *Liouville foliation* corresponding to the integrable system $v = sgradH$.

Since $F_1, ..., F_n$ are preserved by the flow v, every leaf of the Liouville foliation is an invariant surface.

The Liouville foliation consists of regular leaves (filling M almost in the whole) and singular ones (filling a set of the zero measure) [1, 4].

In the case of the Goryachev-Chaplygin problem of the rotation of a solid heavy body around a fixed point, the main moments of inertion satisfy the relation $A = B = 4C$, the center of gravity lies in the equatorial plane of the ellipsoid of inertion. In addition, the initial conditions are chosen so that the area integral constant is equal to zero. then there is an additional partial integral, the presence of which allows us to reduce the integration of the equations of motion to quadratures.

The Hamilton function in this case in special canonical variables L, G, l, g has the form

$$H = \frac{G^2}{8C} + \frac{3L^2}{8C} + \mu\left(\frac{L}{G}\sin l \cos g + \cos l \sin g\right). \tag{2}$$

where C– moment of inertia relative to the axis of dynamic symmetry, and μ– is the Poincare parameter. Function (2) can be rewritten as

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{p_1^3 - p_2^3}{2C(p_1 - p_2)} - \mu\left(\frac{p_1 sinq_1}{p_1 - p_2} + \frac{p_2 sinq_2}{p_1 - p_2}\right) \tag{3}$$

Hamiltonian system $v = sgradH$ corresponding to the Hamiltonian function (3) is

$$\begin{cases} p_1^{'} = \dfrac{\mu p_1 cosq_1}{p_1 - p_2} \\ p_2^{'} = \dfrac{\mu p_2 cosq_2}{p_1 - p_2} \\ q_1^{'} = \dfrac{2p_1 + p_2}{2C} + \mu\left(\dfrac{p_1 sinq_1}{(p_1 - p_2)^2} + \dfrac{p_2 sinq_2}{(p_1 - p_2)^2}\right) \\ q_2^{'} = \dfrac{p_1 + 2p_2}{2C} - \mu\left(\dfrac{p_1 sinq_1}{(p_1 - p_2)^2} + \dfrac{p_2 sinq_2}{(p_1 - p_2)^2}\right) \end{cases} \tag{4}$$

In additionally to Hamiltonian function (3), there exists function

$$F(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{p_1 p_2^3 - p_1^3 p_2}{2C(p_1 - p_2)} + \mu\left(\frac{p_1 p_2 sinq_1}{p_1 - p_2} + \frac{p_1 p_2 sinq_2}{p_1 - p_2}\right) \tag{5}$$

which is the first integral of completely integrable Hamiltonian system in the sense of Liouville (4). [3]

Partition of the manifold $\mathbb{R}^4$ into connected components of joint level surfaces of the first integrals

$$\begin{cases} \dfrac{p_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2}{2C} - \dfrac{\mu p_1 sinq_1}{p_1 - p_2} + \dfrac{\mu p_2 sinq_2}{p_1 - p_2} = c_1 \\ \dfrac{-p_1^2 p_2 - p_1 p_2^2}{2C} + \dfrac{\mu p_1 p_2 sinq_1}{p_1 - p_2} + \dfrac{\mu p_1 p_2 sinq_2}{p_1 - p_2} = c_2 \end{cases} \tag{6}$$

will be Liouville foliation.

Theorem. Leaves of Liouville foliation (6) generated by Hamiltonian system (4) corresponding to energy integral rotation of a solid heavy body around a fixed point in the case of the Goryachev-Chaplygin, when

$$\begin{cases} p_1^2 \neq 0 \\ p_2^2 \neq 0 \\ q_1 \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N} \\ q_2 \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

are two dimensional surfaces with the non-zero Gauss torsion.

References

[1] A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko. Integrable Hamiltonian systems. Izhevsk: Udmurtskiy universitet, 1999.

[2] P. Olver. Applications of Lie Groups to Differential Equations. New York: Springer, 1993.

[3] V. V. Kozlov. Metodi kachestvennogo analiza v dinamike tverdogo tela (russian). Izhevsk: RXD publisher, 2000, 256.

[4] A. Ya. Narmanov, Sh. R. Ergashova. On the geometry of Liouville foliations. *TransSiberia 2023, E3S Web of Conferences.* 2023 *402(03032)*, 1–9 .

A note isolated points of the space of compact maximal linked systems

Mukhamadiev Farkhod
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
farhod8717@mail.ru

In this work, we study some properties of the set of isolated points of the space of compact maximal linked systems. we prove that for a T_1-space, we have that $I(\lambda X) \subset \lambda_c X$, i.e. each isolated point in λX must be a compact maximal linked system. Also prove that for an infinite compact space X with $I(X) = \emptyset$, then $I(\lambda X) = \emptyset$, i.e. if X is a pointless space, then its superextension λX is also pointless.

A system $\xi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ of closed subsets of a space X is called linked, if any two elements of ξ intersect. Any linked system can be upgraded to a maximum linked system (MLS). But such upgrade, as a rule, is not one valued. A linked system of space is MLS, if and only if it possesses the following completeness property [1]: "If a closed set $A \subset X$ intersects with every element of ξ, then $A \in \xi$". We denote λX as the set of all MLS of the space X. For the close set $A \subset X$ we consider $A^+ = \{\xi \in \lambda X : A \in \xi\}$. For the open set $U \subset X$ we consider $O(U) = \{\xi \in \lambda X : \text{there exists } F \in \xi \text{ such that } F \subset U\}$.

The family of sets of the form $O(U)$ covers the set λX ($O(X) = \lambda X$). So, it forms an open prebase of the topology on λX. The set λX, equipped with this topology, is called as the superextension of the space X [2]. Let X be topological space and λX be its superextension. MLS $\xi \in \lambda X$ is called compact, if it contains at least one compact element, and is denoted by CMLS. The space $\lambda_c X = \{\xi \in \lambda X : \xi \text{ is } CMLS\}$ we call as compact super kernel (or compact superextension) of the topological space X. It is clear that $\lambda_c X \subset \lambda X$. We see that $\lambda^* X \subseteq \lambda_c X \subseteq \lambda X$ for topological T_1-space X. If the space X is compact, then we have the equality $\lambda_c X = \lambda X$. If the space X is discrete, then we have another equality $\lambda^* X = \lambda_c X$. The basement of the CMLS ξ in X is the family $\mathfrak{F}(\xi) = \{F \in \xi : F \text{ is a compact}\}$.

First, let's give an example of a linked system that does not contain a compact element.

Example 1. *Let $\mathbb{N}$ be the set of all natural numbers. We set $G_k = \{k, k+1, k+2, \dots\} \subset \mathbb{N}$. It is obvious that $\nu = \{G_k : k \in \mathbb{N}\}$ is a linked system. This system $\nu = \{G_k : k \in \mathbb{N}\}$ we will upgrade to MLS and denote by ξ_ν. We see that MLS ξ_ν does not contain any compact element, i.e. $\xi_\nu \notin \lambda(\mathbb{N})$ and $\xi_\nu \in \lambda(\mathbb{N})$.*

Now we will give an example of an MLS that has a compact element, but does not contain a finite element.

Example 2. *Let $\mathbb{R}$ be the set of all real numbers with a natural topology. We consider $G_1 = [0, 1]$, $G_2 = \{1/2\} \cup [2, +\infty)$, $\dots$, $G_k = \{1/k\} \cup [k, +\infty)$. It is easy to check that the family $\nu = \{G_1, G_2, \dots, G_k, \dots\}$ is a linked system. Now we will upgrade to MLS and denote by ξ_ν. This system ξ_ν does not contain any finite element, i.e. $\xi_\nu \notin \lambda^*(\mathbb{R})$ and $\xi_\nu \in \lambda(\mathbb{R})$.*

Denote by $I(\lambda X)$ the set of all isolated points of the superextension λX. Let's see what connection exists between $I(\lambda X)$ and $\lambda_c X$.

Theorem 1. *Let X be an infinite T_1-space, then we have that $I(\lambda X) \subset \lambda_c X$, i.e. each isolated point in λX must be a CMLS.*

Theorem 2. *Let X be an infinite compact space and $I(X) = \emptyset$, then $I(\lambda X) = \emptyset$, i.e. if X is a pointless space, then its superextension λX is also pointless.*

References

[1] V. V. Fedorchuk, V. V. Filippov. General topology. Basic constructions. Moscow: Fizmatlit, 2006, 333. (in Russian)

[2] J. V. Mill. Supercompactness and Wallman spaces. Mathematical Centre Tracts. Vol. 85., 1977, 238.

Конец сборника